Материалы заданий отборочного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Тур 1

Участник олимпиады получал две разминочные задачи (каждая оценивалась в 1 балл) и десять задач основного задания (первые две задачи оценивались в 9 баллов, остальные – в 10 баллов). Таким образом, максимально возможная сумма баллов – 100.

При этом каждая из указанных задач предлагалась в нескольких вариантах. Подбор задач для каждого участника производился случайным образом, в результате чего варианты заданий у всех были разные.

Задание для разминки

1. Найдите больший корень уравнения $x^2+4x+3=0$.

Ответ: -1.

2. Две стороны прямоугольного треугольника равны 5 и 4. Какое наименьшее значение может принимать третья сторона?

Ответ: 3.

Основное задание

(первое число в номере задачи – порядковый номер задачи;
второе число – номер варианта)

1.1. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 50 рублей, а перьевая – 80 рублей. Какое наибольшее количество гелевых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 20 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 1000 рублей?

Ответ: 13. *Решение.* Если куплено x шариковых ручек, y – гелевых и z – перьевых, то имеем два уравнения: $x+y+z=20$; $10x+50y+80z=1000$ (или $x+5y+8z=100$). Вычитая из второго уравнения первое, получим $4y+7z=80$. Отсюда следует, что z должно делиться на 4, т. е. $z=4n$. Значит, $4y+7\cdot 4n=80$, т. е. $y=20-7n$. Соответственно $x=20-y-z=3n$. Положительные решения получаются при $n=1$ и $n=2$. В итоге решением являются две тройки целых чисел: $(3, 13, 4)$ и $(6, 6, 8)$. Наибольшее возможное y равно 13.

1.2. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 40 рублей, а перьевая – 60 рублей. Какое наибольшее количество шариковых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 15 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 500 рублей?

Ответ: 6. *Комментарии.* Решением являются две тройки целых чисел $(6, 5, 4)$ и $(4, 10, 1)$.

1.3. Шариковая ручка стоит 10 рублей, перьевая – 60 рублей, а гелевая – 70 рублей. Какое наибольшее количество перьевых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 25 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 1000 рублей?

Ответ: 9. *Комментарии.* Решением являются две тройки целых чисел $(11, 9, 5)$ и $(12, 3, 10)$.

1.4. Шариковая ручка стоит 10 рублей, гелевая – 30 рублей, а перьевая – 60 рублей. Какое наибольшее количество шариковых ручек можно купить при условии, что всего нужно купить ровно 20 ручек и среди них должны быть ручки всех трех типов, а истратить на них нужно ровно 500 рублей?

Ответ: 11. *Комментарии.* Решением являются две тройки целых чисел $(11, 5, 4)$ и $(8, 10, 2)$.

2.1. Найдите наименьшее значение *a*, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ равна 0,28.

Ответ: $-0,2$ *Решение.* По теореме Виета $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (3a)^2 - 2a^2 = 7a^2$. По условию $7a^2 = \frac{28}{100}$, отсюда $a^2 = \frac{1}{25}$ и $a = \pm 0,2$. Важно при этом, что при $a = \pm 0,2$ дискриминант $D = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 > 0$.

2.2. Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+3ax+a^2=0$ равна 2,52.

Ответ: $-0,6$

2.3. Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+4ax+2a^2=0$ равна 1,08.

Ответ: $-0,3$

2.4. Найдите наименьшее значение a, при котором сумма квадратов корней уравнения $x^2+4ax+a^2=0$ равна 2,24.

Ответ: $-0,4$

3.1. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 81, отсекает от нее пирамиду объема 3. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

Ответ: 6. *Решение*. Если обозначить первый данный в условии объем V, а второй v (в данном случае $V=81,\ v=3$), то большая пирамида и меньшая пирамида подобны с коэффициентом подобия $\sqrt[3]{\frac{V}{v}}$. Поэтому высота H большей пирамиды относится к высоте h меньшей как $\sqrt[3]{\frac{V}{v}}$. Так как высоте пирамиды, объем которой нужно найти, равна $H-h$, то $\frac{H-h}{h}=\sqrt[3]{\frac{V}{v}}-1$. Значит, объем искомой пирамиды равен $v\left(\sqrt[3]{\frac{V}{v}}-1\right)$.

3.2. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 54, отсекает от нее пирамиду объема 16. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

Ответ: 8.

3.3. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 27, отсекает от нее пирамиду объема 8. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

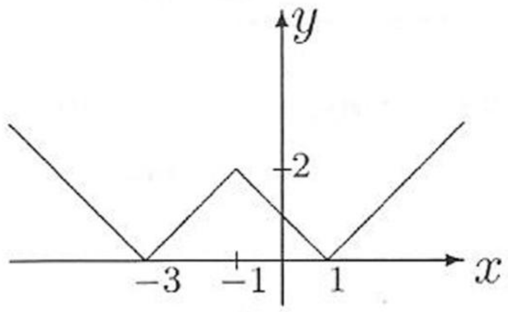
Ответ: 4.

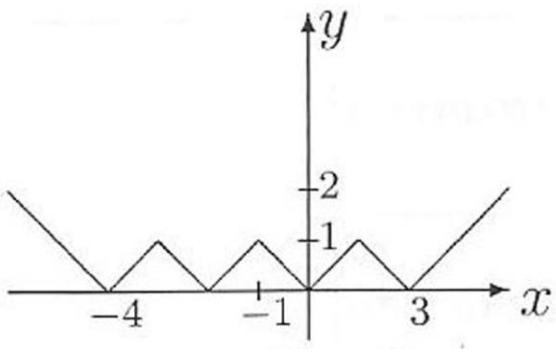
3.4. Плоскость, параллельная основанию четырехугольной пирамиды объема 54, отсекает от нее пирамиду объема 2. Найдите объем пирамиды, четыре вершины которой совпадают с вершинами сечения, а пятая лежит в плоскости основания большей пирамиды.

Ответ: 4.

4.1. Дана функция $f(x)=||x+1|-2|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(\ldots f\left(f(x)\right)\ldots\right)\right)=\frac{1}{2}$, в котором функция f берется 2013 раз?

Ответ: 4030. *Решение.* Рассматривая график функции f (*см. рис. 1*), приходим к выводу, что $|f(x)+1|=f(x)+1$ и $|f(x)+1|-2=f(x)-1$. Поэтому график функции $f\left(f(x)\right)$





имеет вид как на *рис. 2*.

Рис. 1

Рис. 2

Уравнение $f\left(f(x)\right)=\frac{1}{2}$ имеет 8 решений. Заметим, что между лучами $y=-x-4$, $x\leq-4$ и $y=x-3$, $x\geq3$ находится ровно три треугольника, длины оснований которых равны 2, а высоты – 1. Следующая подстановка $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ меняет график следующим образом: лучи $y=-x-4$, $x\leq-4$ и $y=x-3$, $x\geq3$ перейдут в лучи $y=-x-5$, $x\leq-5$ и $y=x-4$, $x\geq4$, а между ними появится еще один треугольник, длина основания которого равна 2, а высота – 1. Поэтому уравнение $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=\frac{1}{2}$ имеет 10 решений. Каждая следующая подстановка $f\left(...\right)$ меняет график функции аналогично: сдвигает на 1 крайние лучи влево и вправо соответственно и добавляет между лучами еще один треугольник, длина основания которого равна 2, а высота – 1. Таким образом, начиная с функции $f\left(f\left(x\right)\right)$, каждая следующая подстановка $f\left(...\right)$ увеличивает количество решений предыдущего уравнения на два. Получаем, что если применить функцию 2013 раз, то количество корней такого уравнения равно $8+2\cdot 2011=4030$.

4.2. Дана функция $f\left(x\right)=\left|\left|x+2\right|-4\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(...f\left(f\left(x\right)\right)...\right)\right)=1$, в котором функция f берется 2014 раз?

Ответ: 4032.

4.3. Дана функция $f\left(x\right)=\left|\left|x+1,5\right|-3\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(...f\left(f\left(x\right)\right)...\right)\right)=0,5$, в котором функция f берется 2012 раз?

Ответ: 4028.

4.4. Дана функция $f\left(x\right)=\left|\left|x+2,5\right|-5\right|$. Сколько корней имеет уравнение $f\left(f\left(...f\left(f\left(x\right)\right)...\right)\right)=1$, в котором функция f берется 2015 раз?

Ответ: 4034.

5.1. Укажите целое число, ближайшее к числу

$$\sqrt{2012-\sqrt{2013\cdot 2011}}+\sqrt{2010-\sqrt{2011\cdot 2009}}+...+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}.$$

Ответ: 31. *Решение.* Данное в условии число равно

$$\frac{\sqrt{4024-2\sqrt{2013\cdot 2011}}+\sqrt{4010-2\sqrt{2011\cdot 2009}}+...+\sqrt{4-2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\sqrt{2013}-\sqrt{2011}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2011}-\sqrt{2009}\right)^2}+\ldots+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)^2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2013}-\sqrt{2011}+\sqrt{2011}-\sqrt{2009}+\ldots+\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2013}-1}{\sqrt{2}}.$$

Так как $\frac{\sqrt{2013}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2012}{\sqrt{2013\cdot 2}+\sqrt{2}} > \frac{2012}{64+1{,}5} = \frac{4024}{131} > 30{,}7$, и

$\frac{\sqrt{2013}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2012}{\sqrt{2013\cdot 2}+\sqrt{2}} < \frac{2012}{63+1} = \frac{503}{16} < 31{,}5$, то искомое целое число равно 31.

5.2. Укажите целое число, ближайшее к числу

$\sqrt{10000-\sqrt{10001\cdot 9999}}+\sqrt{9998-\sqrt{9999\cdot 9997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}$.

Ответ: 70.

5.3. Укажите целое число, ближайшее к числу

$\sqrt{20000-\sqrt{20001\cdot 19999}}+\sqrt{19998-\sqrt{19999\cdot 19997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}$.

Ответ: 99.

5.4. Укажите целое число, ближайшее к числу

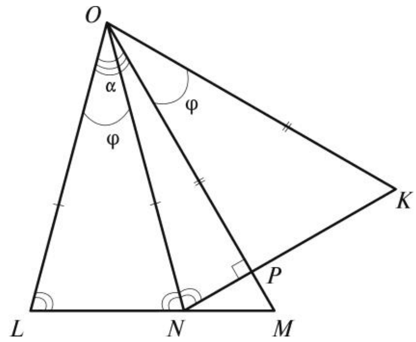
$\sqrt{5000-\sqrt{5001\cdot 4999}}+\sqrt{4998-\sqrt{4999\cdot 4997}}+\ldots+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}$.

Ответ: 49.

6. Треугольник LOM с углом $\angle LOM = \alpha^\circ$ повернули на некоторый острый угол вокруг точки O. При этом точка L переходит в точку N, лежащую на стороне LM, а точка M – в такую точку K, что $OM \perp NK$. Найдите угол поворота (в градусах).

Примечание: В разных вариантах задавались разные значения для α: 21, 24, 27, 33, 39, 42, 48, 51, 54, 57, 63, 66, 69, 72, 78.

Ответ: $\frac{2}{3}\alpha$. *Решение*. Обозначим угол поворота через φ. Тогда $\angle LON = \angle MOK = \varphi$. Так как $ON = OL$ (свойство поворота), то $\angle OLN = \angle ONL = 90° - \frac{\varphi}{2}$.



Кроме того, $\angle ONK = \angle OLN = 90° - \frac{\varphi}{2}$ (следствие равенства ΔLOM и ΔNOK).

Поэтому $\angle NOP = \frac{\varphi}{2}$. Это означает, что $\alpha = \frac{3\varphi}{2}$, то есть $\varphi = \frac{2\alpha}{3}$.

7.1. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{1-\sin\frac{\pi x}{4}-3\cos\frac{\pi x}{2}}-\sqrt{6}\cdot\sin\frac{\pi x}{4} \ge 0$, принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

Ответ: 8. *Решение.* Обозначив $\sin\frac{\pi x}{4} = t$, получим $\sqrt{1-t-3\left(1-2t^2\right)} \ge \sqrt{6}\cdot t$, или $\sqrt{6t^2-t-2} \ge \sqrt{6}\cdot t$. При неотрицательных t получаем $6t^2-t-2 \ge 6t^2$, или $t \le -2$, то есть решений нет. При $t<0$ условие $6t^2-t-2 \ge 0$ дает $t \le -\frac{1}{2}$. Таким образом, получаем решение $\sin\frac{\pi x}{4} \le -\frac{1}{2}$, откуда $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k \le \frac{\pi x}{4} \le -\frac{\pi}{6}+2\pi k$, или $-\frac{10}{3}+8k \le x \le -\frac{2}{3}+8k$.

Целые решения: $5+8k$, $6+8k$, $7+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1991, 1997, 1998, 1999, 2005, 2006, 2007, 2013 – 8 чисел.

7.2. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{3\cos\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{4}+1}-\sqrt{6}\cdot\cos\frac{\pi x}{4} \ge 0$, принадлежащих отрезку $[1991; 2013]$.

Ответ: 9. *Комментарии.* Решение неравенства: $\frac{8}{3}+8k \le x \le \frac{16}{3}+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1995, 1996, 1997, 2003, 2004, 2005, 2011, 2012, 2013 – 9 чисел.

7.3. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{1+\sin\frac{\pi x}{4}-3\cos\frac{\pi x}{2}}+\sqrt{6}\cdot\sin\frac{\pi x}{4}\geq 0$, принадлежащих отрезку $[1991;2013]$.

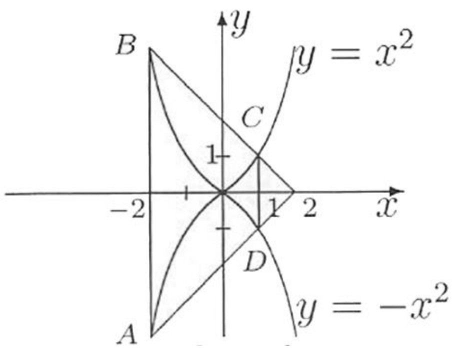
Ответ: 9. *Комментарии.* Решение неравенства: $\frac{2}{3}+8k\leq x\leq\frac{10}{3}+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1993, 1994, 1995, 2001, 2002, 2003, 2009, 2010, 2011 – 9 чисел.

7.4. Найдите количество всех целочисленных решений неравенства $\sqrt{3\cos\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{4}+1}+\sqrt{6}\cdot\cos\frac{\pi x}{4}\geq 0$, принадлежащих отрезку $[1991;2013]$.

Ответ: 9. *Комментарии.* Решение неравенства: $-\frac{4}{3}+8k\leq x\leq\frac{4}{3}+8k$. Из заданного промежутка в ответ войдут: 1991, 1992, 1993, 1999, 2000, 2001, 2007, 2008, 2009 – 9 чисел.

8.1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $2(2-x)\geq\left|y-x^2\right|+\left|y+x^2\right|$.

Ответ: 15. *Решение.* В области над графиками функций $y=x^2$ и $y=-x^2$ исходное неравенство принимает вид $2-x\geq y$. В области под графиками функций $y=x^2$ и $y=-x^2$ исходное неравенство принимает вид $2-x\geq -y$, т. е. $y\geq x-2$. В области, лежащей над графиком функции $y=-x^2$ и под графиком функции $y=x^2$, исходное неравенство имеет вид $2-x\geq x^2$.



Поэтому точки (x,y), удовлетворяющие данному неравенству, образуют на координатной плоскости трапецию *ABCD*, ограниченную прямыми $y=-x+2$, $y=x-2$, $x=-2$ и $x=1$ (*см. рисунок*), вершины которой находятся в точках $(-2;-4)$, $(-2;4)$, $(1;1)$ и $(1;-1)$.

Так как $AB=8$, $CD=2$, а высота трапеции равна 3, то искомая площадь равна $\frac{8+2}{2}\cdot 3=15$.

8.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $2(3-2x)\geq|y-x^2|+|y+x^2|$.

Ответ: 40.

8.3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $|2y-x^2|+|2y+x^2|\leq 4+2x$.

Ответ: 7,5.

8.4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $|y-2x^2|+|y+2x^2|\leq 4(x+2)$.

Ответ: 30.

9.1. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 10 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ: 89. *Решение.* Заметим, что на крыльцо из одной ступеньки Маша может подняться одним способом, а на крыльцо из двух ступенек – двумя: либо наступив на каждую ступеньку, либо, перешагнув через первую ступеньку, попасть сразу на вторую.

Пусть a_n – количество способов, которыми Маша может подняться на крыльцо, имеющее n ступенек. Так как на n-ю ступеньку Маша может подняться либо с $(n-1)$-й ступеньки, либо с $(n-2)$-й ступеньки, то $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}$.

Последовательно вычисляем: $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=1+2=3$, $a_4=2+3=5$, $a_5=3+5=8$, $a_6=5+8=13$, $a_7=8+13=21$, $a_8=13+21=34$, $a_9=21+34=55$, $a_{10}=34+55=89$.

Заметим, что числа, построенные по правилу $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$ $(n\geq 2)$, называются числами Фибоначчи. Таким образом, $a_n=F_{n+1}$.

9.2. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ: 55.

9.3. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 11 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

Ответ: 144.

9.4. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается со школьного крыльца по лестнице, имеющей 10 ступенек. Находясь вверху лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо спуститься на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вниз (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Ответ: 89.

9.5. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается со школьного крыльца по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь вверху лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо спуститься на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вниз (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Ответ: 55.

9.6. Первоклассница Маша, выходя из школы, каждый раз спускается со школьного крыльца по лестнице, имеющей 11 ступенек. Находясь вверху лестницы или на очередной ее ступеньке, она может либо спуститься на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вниз (перепрыгнуть через две или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно выйти из школы, чтобы спуститься с крыльца всеми возможными способами?

Ответ: 144.

10.1. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6+a_1x^5+...+a_5x+a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1+a_2+...+a_6$.

Ответ: -47. *Решение.* $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{5} \Rightarrow \left(x-\sqrt{2}\right)^3=5 \Rightarrow x^3-3x^2\sqrt{2}+3x\cdot 2-2\sqrt{2}=5$

$\Rightarrow x^3+6x-5=\left(3x^2+2\right)\cdot\sqrt{2} \Rightarrow \left(x^3+6x-5\right)^2=\left(3x^2+2\right)^2\cdot 2$

$\Rightarrow P_6\left(x\right)=\left(x^3+6x-5\right)^2-2\left(3x^2+2\right)^2$. При этом сам многочлен в явном виде получать не нужно (для справки заметим, что это многочлен $x^6-6x^4-10x^3+12x^2-60x+17$), так как нам нужна сумма: $a_1+...+a_6=P_6\left(1\right)-1=2^2-2\cdot 5^2-1=-47$.

10.2. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6+a_1x^5+...+a_5x+a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1+a_2+...+a_6$.

Ответ: 93.

10.3. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6+a_1x^5+...+a_5x+a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1+a_2+...+a_6$.

Ответ: 49.

10.4. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6 + a_1 x^5 + ... + a_5 x + a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1 + a_2 + ... + a_6$.

Ответ: -35.

10.5. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6 + a_1 x^5 + ... + a_5 x + a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1 + a_2 + ... + a_6$.

Ответ: -84.

10.6. Найдя какой-нибудь многочлен шестой степени $x^6 + a_1 x^5 + ... + a_5 x + a_6$ с целыми коэффициентами, одним из корней которого служит число $\sqrt{3} - \sqrt[3]{5}$, впишите в ответ сумму его коэффициентов $a_1 + a_2 + ... + a_6$.

Ответ: 116.