Материалы заданий заключительного этапа олимпиады школьников «Ломоносов» по математике за 2013/2014 учебный год

Решения задач варианта 1

1. Ответ: $-\dfrac{1}{2}$. **Решение.** Уравнение имеет корни при $a^2-4a\ge 0$, то есть при $a\le 0$ и при $a\ge 4$. По теореме Виета: $\left(|x_1|+|x_2|\right)^2=x_1^2+x_2^2+2|x_1x_2|=\left(x_1+x_2\right)^2+2\left(|x_1x_2|-x_1x_2\right)\ =4a^2+8\left(|a|-a\right)$. По условию $4a^2+8\left(|a|-a\right)=9$. При $a\le 0$ получаем $4a^2-16a=9$, откуда $a=-\dfrac{1}{2}$ или $a=\dfrac{9}{2}$ (посторонний корень). При $a\ge 4$ получаем $4a^2=9$, откуда $a=\pm\dfrac{3}{2}$ – оба корня меньше 4.

2. Ответ: 10 070. **Решение.** Число a и сумма цифр числа a при делении на 9 дают одинаковые остатки, поэтому в итоге на доске останется ряд чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, …, 9, 1, 2, и так далее. Так как $2014=9\cdot 223+7$, то в этом ряду 223 раза встретится последовательность от 1 до 9 и будет ещё 7 цифр. Значит, ряд заканчивается цифрой 8, и искомая сумма чисел равна $\left(1+2+...+9\right)\cdot 224-1-9\ =45\cdot 224-10=10\,070$.

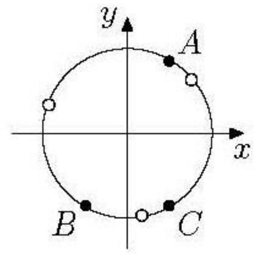
3. Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$**. Решение.** Обозначим острый угол и сторону ромба через α и a соответственно. Пусть расстояние от вершины при остром угле ромба до вершины прямоугольника, лежащей на смежной с углом стороне равно x. Тогда стороны вписанного в ромб прямоугольника равны $2x\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $2\left(a-x\right)\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Площадь прямоугольника $S=2x\left(a-x\right)\sin\alpha$ будет максимальной при $x=\dfrac{a}{2}$ (вершина параболы). Следовательно, стороны прямоугольника равны $a\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $a\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Поскольку отношение сторон равно 2, то $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha=2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$**.**

4. Ответ: $a=-\dfrac{1}{2013}$**,** $b=\log_{2014}2013$**. Решение.** Из выпуклости вверх графика функции $y=\log_{2014}\left(x-a\right)$ и выпуклости вниз графика функции $2x^2-x-b$ следует, что промежуток $\left(0;1\right)$ является множеством решений неравенства тогда и только тогда, когда числа $x=0$ и $x=1$ – решения соответствующего уравнения: $\log_{2014}\left(x-a\right)=2x^2-x-b$. Следовательно,

$$\begin{cases}\log_{2014}\left(-a\right)=-b,\\ \log_{2014}\left(1-a\right)=1-b\end{cases}\Leftrightarrow\ \begin{cases}\log_{2014}\left(-a\right)=-b,\\ \log_{2014}\left(\dfrac{a-1}{a}\right)=1,\end{cases}$$ откуда $a=-\dfrac{1}{2013}$**,** $b=\log_{2014}2013$.

5. Ответ: $\alpha\in\left(\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$. **Решение.** $g\left(x\right)=0\ \Leftrightarrow\ 2\sin 2x-4\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\ \left(2\sin x+\sqrt{3}\right)\left(2\cos x-1\right)=0\ \Leftrightarrow\ \cos x=\dfrac{1}{2},\ \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ x=\dfrac{4\pi}{3}+2\pi k$, $n,k\in\mathbb{Z}$. Расстояния на тригонометрической окружности против часовой стрелки между нулями функции g (точки A, B и C), считая от точки A, равны π, $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$.



Нули функции f равны $\dfrac{2\alpha}{3}+\dfrac{2\pi m}{3}$, $m\in\mathbb{Z}$ и на тригонометрической окружности образуют правильный треугольник. Расстояния между этими точками равны $\frac{2\pi}{3}$. Необходимое и достаточное условие чередования нулей этих функций состоит в том, что на дуге *BC* содержится нуль функции *f*, следовательно, в точках *B* и *C* функция *f* принимает разные знаки: $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cdot f\left(\frac{5\pi}{3}\right)<0 \Leftrightarrow \sin(2\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)<0 \Leftrightarrow \sin 2\alpha>0 \Leftrightarrow$ $\alpha\in\left(\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

6. Ответ: $2\cdot5\cdot24\cdot500=120$ тыс. руб. **Решение.** 1. Двойной оплаты времени охраны точно хватит, поскольку из любого покрытия отрезка конечной системой отрезков можно выбрать не более чем двукратное подпокрытие (если какая-то точка покрыта более чем двумя отрезками, то можно оставить только два из них — с самым левым концом и с самым правым, а остальные выбросить).

2. Менее чем двойной оплаты может не хватить при грамотных действиях охранников: они могут поставить свои дежурства так, чтобы ни одного из них выбросить было нельзя, а суммарная длина дежурств была сколь угодно близкой к удвоенному периоду наблюдения.

7. Ответ: $\frac{12\pi}{5}$ **Решение.** Обозначим через *r* радиус шара, а через *D*, D_1, *M* и *N* – середины рёбер *BC*, B_1C_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Плоскость AA_1D_1 есть центральное сечение шара. Пусть *h* – высота цилиндра, тогда радиус его основания равен $R=\sqrt{r^2-\frac{h^2}{4}}$. Пусть *P* – точка пересечения отрезков DD_1 и MN. Справедливы соотношения $OP=r$, $PD=r$, $AD=3r$, где *O* – центр шара. Если O_1 – проекция точки *O* на основание цилиндра, то из подобия прямоугольных треугольников APD и OO_1P получаем

$$\frac{OO_1}{OP}=\frac{PD}{AP} \Leftrightarrow \frac{OO_1}{r}=\frac{r}{\sqrt{9r^2+r^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда $OO_1=\frac{r\sqrt{10}}{10}$, $h=2\cdot OO_1=\frac{r\sqrt{10}}{5}$. Значит, $R=\frac{3r\sqrt{10}}{10}$.

Площадь боковой поверхности $S_{бок.}=2\pi Rh=\frac{6\pi r^2}{5}$.

8. Ответ: 450. **Решение.** Пусть в таблице *m* строк и *n* столбцов, а клетка, получившая одинаковые номера, расположена в строке с номером *i* и в столбце с номером *j*. Тогда, если считать по строкам, в этой клетке стоит число $(i-1)\cdot n+j$, а если считать по столбцам, то это число равно $(j-1)\cdot m+i$. Следовательно, $(i-1)\cdot n+j=(j-1)\cdot m+i \Leftrightarrow$ $(i-1)\cdot(n-1)=(j-1)\cdot(m-1)$.

Если $m=1$ или $n=1$, то номера Пети и Васи совпадут во всех клетках. Значит, $m>1$ и $n>1$. Пусть $d=\text{НОД}(n-1,m-1)$, тогда $n-1=pd$, $m-1=qd$, где $\text{НОД}(p,q)=1$. Получаем $(i-1)\cdot p=(j-1)\cdot q$. Поэтому $i-1=qk$, $j-1=pk$, $k=0,1,\ldots,d$. Следовательно, количество клеток, получивших одинаковые номера, равно $d+1=\text{НОД}(n-1,m-1)+1$.

Так как $5681=13\cdot19\cdot23$, то $n=13$, $m=19\cdot23=437$ или, наоборот, $n=437$, $m=13$. В любом случае $m+n=450$.

Ответы к задачам варианта 2

1. -1.

2. 10 065.

3. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \equiv \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

4. $a = -\frac{2012}{2013}$, $b = \log_{2014} 2013$.

5. $\alpha \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

6. $\frac{80000}{2 \cdot 250} = 160$ ч.

7. $\frac{9\pi\sqrt{2}}{2}$.

8. 332.

Ответы к задачам варианта 3

1. $-\frac{2}{9}$.

2. 10 075.

3. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} \equiv \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

4. $a = -\frac{2}{2013}$, $b = \log_{2014}\left(\frac{2013}{2}\right)$.

5. $\alpha \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

6. $2 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 400 = 192$ тыс. руб.

7. $\frac{18\pi}{5}$.

8. 358.

Ответы к задачам варианта 4

1. $-\dfrac{9}{25}$.

2. 10 069.

3. $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} \equiv \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12}$.

4. $a=-\dfrac{4024}{2013}$, $b=\log_{2014}\left(\dfrac{2013}{4028}\right)$.

5. $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n; \pi+\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

6. $\dfrac{90000}{2\cdot 300}=150$ ч.

7. 18π.

8. 464.