9 класс

1. За круглым столом собрались несколько юношей и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юношей справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

2. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она надевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной руке ровно один раз?

4. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\ldots4}_{2012\text{ раз}}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2012\text{ раз}}$

5. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

6. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

7. Точка P лежит внутри треугольника ABC. Её соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неё на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

8. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа $503, 504, \ldots, 2011$ можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

9. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка M. Из точки M на стороны AB и BC опущены перпендикуляры MN и MP. Где должна находиться точка M, чтобы длина отрезка NP была минимальной?

10. Решите уравнение:
$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]},$$
где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$.