10–11 классы

На первой странице работы (перед решениями задач) поместите таблицу ответов к ним. Если задача не решена или не доведена до ответа, то в соответствующей графе поставьте прочерк. Столбец «Балл», который требуется для проверки работы, заполнять не нужно.

Задача	*Ответ*	*Балл*
№1		
№2		
№3		
№4		
№5		
№6		
№7		
№8		
№9		
№10		

В решении задачи оценивается, прежде всего, математическая правильность, однако приветствуется и рациональность решения, а также аккуратность и подробность его текста. Все решения должны быть полными и обоснованными, ссылки на вычисления на калькуляторе и использование результатов, полученных с помощью специализированных компьютерных программ, запрещены. Работы с идентичными решениями не смогут претендовать на высокую оценку.

Не советуем прибегать к услугам репетиторов или более подготовленных товарищей, так как если Вас пригласят на следующий (очный) тур олимпиады, факт помощи станет очевидным, и Вы почувствуете себя неловко.

Призываем всех участников присылать свои работы, независимо от того, сколько задач вы смогли решить. Опыт предыдущих олимпиад показал, что шансы на участие в очном туре есть у всех! Удачи и сил!

10–11 классы

1. Знайка сообщил коротышкам, что в декабре и в январе потребление арбузного сиропа в Зеленом городе в среднем составило 10 бочек в день и 5 бочек в день соответственно. Отсюда Незнайка сделал вывод, что дней, в которые потребление сиропа составляло не менее чем по 10 бочек, в декабре непременно было больше, чем в январе. Прав ли Незнайка?

2. Котёнок откусывает четверть сосиски с одного конца, после чего щенок откусывает треть оставшегося куска сосиски с противоположного конца, затем снова котенок — четверть со своего конца, а щенок — треть со своего конца и т. д. Требуется заранее перевязать сосиску поперек ниткой так, чтобы нитку никто не съел. В каком отношении она должна разделить сосиску?

3. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задана равенствами
$$a_1 = 100, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
Найдите целое число, ближайшее к a_{2013}.

4. Участникам викторины было задано четыре вопроса: на первый вопрос правильно ответили 90 участников, на второй — 50, на третий — 40, а на четвертый — 20, причем никто не смог правильно ответить более чем на два вопроса. Каково наименьшее число участников викторины при этих условиях?

5. Фиксированный луч света падает на зеркало, образуя со своей проекцией на плоскость зеркала острый угол α. Зеркало поворачивают вокруг указанной проекции на острый угол β. Найдите угол между двумя отраженными лучами, полученными до и после поворота.

6. Фигура на координатной плоскости состоит из точек (x, y), удовлетворяющих при любом $t \in \mathbb{R}$ двум неравенствам
$$x^2 + y^2 < \pi^2 + t^2, \quad \cos y < 2 + \cos 2x + \cos x(4\sin t - 1) - \cos 2t.$$
Найдите площадь этой фигуры.

7. Вовочка написал на доске равенство $101 = 11011$. Учитель информатики сказал, что это равенство будет верным, если понимать его как запись одного и того же числа, но в разных системах счисления. Найдите основания этих систем.

8. Найдите минимальное значение дискриминанта квадратного трёхчлена, график которого не имеет общих точек с областями, расположенными ниже оси абсцисс и над графиком функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM и CN, причем $\angle ANM = \angle ALC$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника LMN, две стороны которого равны 3 и 4.

10. При каких натуральных n и k неравенства $|x_1| + \ldots + |x_k| \leqslant n$ и $|y_1| + \ldots + |y_n| \leqslant k$ имеют одинаковые количества целочисленных решений $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$?