Решение задач для 9 класса

1. За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

Ответ: 35 человек.

Решение: Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у котрых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

2. На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: "Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек". Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

Ответ: Любое количество.

Решение: Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К») $BKKBKKBK\ \underbrace{K\dots K}_{\text{любое кол–во}}$.
Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким–нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1–й, либо 2–й вегетарианец стоит через четное число людей (большее 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

3. У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

Ответ: Нет.

Решение: Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его n дней. Тогда он побывает в паре ровно с $2n$ браслетами, что не может быть равно 99.

4. Найдите сумму цифр числа $\underbrace{44\dots4}_{\text{2012 раз}}\cdot\underbrace{99\dots9}_{\text{2012 раз}}$

Ответ: 18108.

Решение: Заметим, что $\underbrace{4\dots4}_{2012}\cdot\underbrace{9\dots9}_{2012} = \underbrace{4\dots4}_{2012}\underbrace{0\dots0}_{2012} - \underbrace{4\dots4}_{2012} = \underbrace{4\dots4}_{2011}3\underbrace{5\dots5}_{2011}6$.
Сумма цифр равна $4\cdot2011+3+5\cdot2011+6=18108$.

5. Бешеный маляр бегает по клеткам доски 2012×2013, изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

Ответ: Да, всегда.

Решение: Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно поменять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.

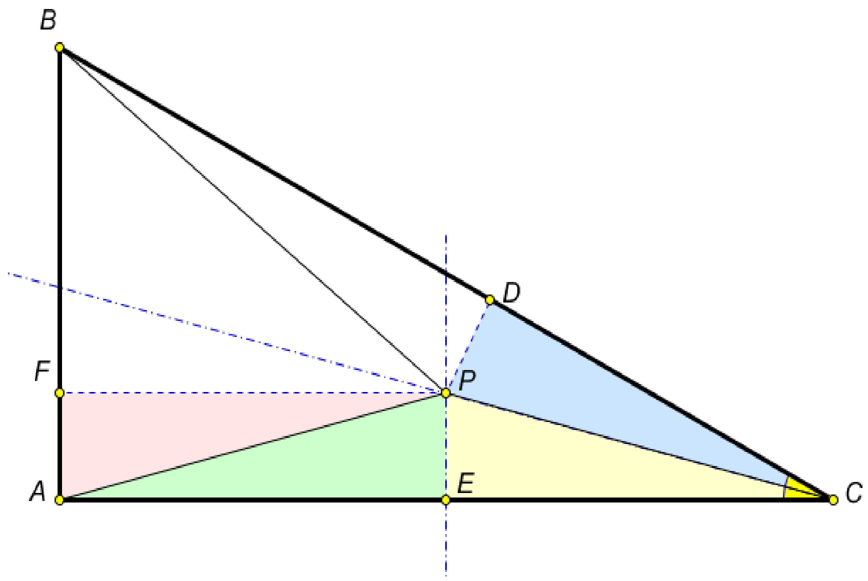
6. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы 100×100 ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

Решение: Если верить Саше, то сумма цифр в кадой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

7. Точка P лежит внутрит треугольника ABC. Ечј соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из нечј на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

Ответ: Не обязательно..

Решение: Пример такого треугольника, не являющегося равнобедренным. Здесь, $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник, точка P получена перечесением биссектрисы угла $\angle BCA$ и серединного перпендикуляра к стороне AC.



8. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое n, что числа 503, 504, ..., 2011 можно разбить на n множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

Ответ: $n = 2$.

Решение: Покажем, что указанное множество можно разбить на два подмножества, так, чтобы оба не были плохими. Рассмотрим множества $M_1 = \{503, 504, \ldots, 671\}$, $M_2 = \{672, 673, \ldots, 1006\}$, $M_3 = \{1007, 1008, \ldots, 1340\}$, $M_4 = \{1341, 1342, \ldots, 2011\}$ и покажем, что $M_1 \cup M_3$ и $M_2 \cup M_4$ не являются плохими.

Докажем, что $M_1 \cup M_3$ не плохое. Рассмотрим варианты:

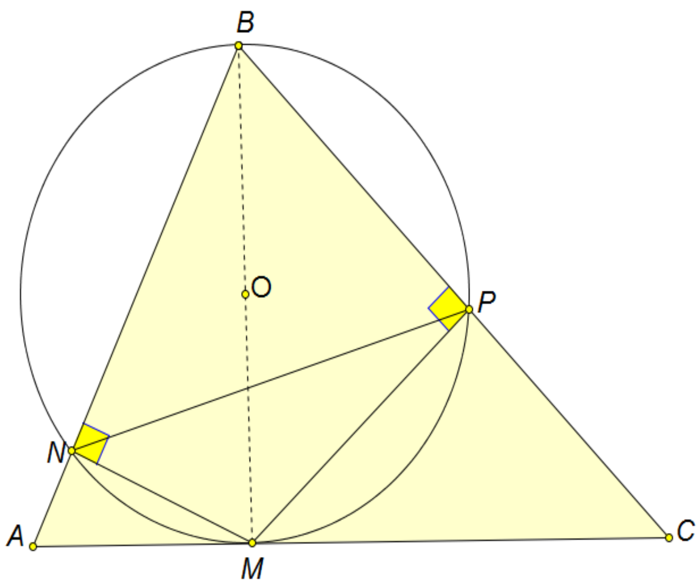
- Четыре числа из множества M_1 дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 505 + 506 = 2018 > 2012$;
- Три числа из множества M_1 дают сумму $S \leqslant 669 + 670 + 671 = 2010 < 2012$;
- Два числа из множества M_1 и одно из M_3 дают сумму $S \geqslant 503 + 504 + 1007 = 2014 > 2012$;
- Одно число из множества M_1 и одно из M_3 дают сумму $S \leqslant 671 + 1340 = 2011 < 2012$;
- Два числа из M_3 дают сумму $S \geqslant 1007 * 3 = 2021 > 2012$;

Аналогично доказывается для $M_2 \cup M_4$.

9. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка M. Из точки M на стороны AB и BC опущены перпендикуляры MN и MP. Где должна находиться точка M, чтобы длина отрезка NP была минимальной?

Ответ: Точка M должна быть основанием высоты, опущенной из точки B.

Решение: Построим окружность с диаметром BM, очевидно, что точки N и P будут лежать на ней.



На хорду NP опирается фиксированный угол $\angle ABC$, следовательно, ее длина минимальна, если минимален диаметр окружности. А диаметр, равный MB минимален тогда, когда BM — высота.

10. Решите уравнение:

$$\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{x} + \frac{10}{[x]},$$

где $[x]$ — наименьшее целое число, не превосходящее x, а $\{x\} = x - [x]$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение: Заметим, что x не может быть отрицательным, т.к. в таком случае правая часть была бы отрицательной. Кроме того, x не может быть целым, т.к. дробная часть была бы равна 0, и не может принадлежать интервалу $[0, 1)$, т.к. целая часть была бы равна 0. Рассмотрим возможные варианты:

- Если $[x] = 1$, то $\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{1+\{x\}} + 10$. Тогда $\{x\} = \frac{1}{2}$, следовательно $x = \frac{3}{2}$;
- Если $[x] = 2$ то $\frac{8}{\{x\}} = \frac{9}{2+\{x\}} + 5$, откуда получаем $\{x\} = 1$, что невозможно.
- Если $[x] \geqslant 3$, то $\frac{9}{x} + \frac{10}{[x]} < 3 + \frac{10}{3} < 8 < \frac{8}{\{x\}}$.