

## Решение задач для 8 класса

**1.** Два олигарха Алехандро и Максимилиан за 2012 год взяли и разграбили свою страну. Известно, что состояние Алехандро на конец 2012 года равняется двум состояниям Максимилиана на конец 2011 года. А состояние Максимилиана на конец 2012 года меньше, чем состояние Алехандро на конец 2011 года. Что больше: состояние Максимилиана или национальные богатства страны?

**Ответ:** Состояние Максимилиана больше.

**Решение:** Рассмотрим таблицу, в которой  $z$ ,  $x$  — состояния Алехандро и Максимилиана в 2011 году:

	2011	2012
А	$z$	$2x$
М	$x$	$y$

Тогда  $N = (2x + y) - (x + z)$  — национальные богатства страны. Вычтем из них  $x$ , получаем  $N - x = y - z < 0$ , следовательно, они меньше состояния Максимилиана.

**2.** За круглым столом собрались несколько юнош и девушек. Известно, что ровно для 7 девушек слева от них сидят девушки, а для 12 — юноши. Также известно, что для 75% юнош справа от них сидят девушки. Сколько человек сидит за столом?

**Ответ:** 35 человек.

**Решение:** Из условия видно, что девушек ровно 19.

Заметим, что количество девушек, слева от которых сидят юноши равно количеству юношей у которых справа сидят девушки. Таким образом 75% юношей равно 12, т.е. всего за столом сидит 16 юношей. Итого, получим 19 девушек + 16 юношей = 35 человек.

**3.** У модницы Елизаветы есть 100 различных браслетов и каждый день она одевает в школу какие-то три из них. Могло ли через некоторое время оказаться так, чтобы любая пара браслетов вместе побывала на Лизиной ручке ровно один раз?

**Ответ:** Нет.

**Решение:** Рассмотрим первый браслет. Он должен побывать в паре с каждым из остальных 99 ровно один раз. Допустим Лиза надевает его  $n$  дней. Тогда он побывает в паре ровно с  $2n$  браслетами, что не может быть равно 99.

**4.** На далеком острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. Как-то раз вегетарианец и еще несколько жителей острова выстроились в ряд и каждый сказал: “Все вегетарианцы стоят от меня через простое число человек”. Сколько жителей острова могло выстроиться в ряд?

**Ответ:** Любое количество.

**Решение:** Рассмотрим следующую расстановку жителей острова (вегетарианцы обозначены буквами «В», каннибалы — буквами «К»)  $VKKVKKKVK \underbrace{K \dots K}_{\text{любое кол-во}}$ .

Каждый вегетарианец стоит либо через 2, либо через 5 от другого вегетарианца, следовательно, для них утверждение истинно. Для каннибалов, которые стоят рядом или через одного с каким-нибудь вегетарианцем утверждение ложно (напомним, что 1 — не простое!). Для каннибалов, стоящих в правой части, либо 1-й, либо 2-й вегетарианец стоит через четное число людей (большее 2), следовательно для них утверждение тоже ложно. Таким образом, в ряд можно выстроить 6 и более жителей острова.

Непосредственно проверяется, что 1,2,3,4,5 жителей тоже можно выстроить, так, чтобы выполнялось условие задачи. Например брать начальные отрезки предложенного построения.

5. Найдите сумму цифр числа  $\underbrace{44\dots4}_{2012 \text{ раз}} \cdot \underbrace{99\dots9}_{2012 \text{ раз}}$

**Ответ:** 18108.

**Решение:** Заметим, что  $\underbrace{4\dots4}_{2012} \cdot \underbrace{9\dots9}_{2012} = \underbrace{4\dots40\dots0}_{2012} - \underbrace{4\dots4}_{2012} = \underbrace{4\dots43}_{2011} \underbrace{5\dots56}_{2011}$ .

Сумма цифр равна  $4 \cdot 2011 + 3 + 5 \cdot 2011 + 6 = 18108$ .

6. Бешеный маляр бежит по клеткам доски  $2012 \times 2013$ , изначально покрашенной в черный и белый цвета. В самом начале он вбегает в угловую клетку. После того, как маляр покидает клетку, эта клетка меняет свой цвет. Всегда ли маляр сможет пробежать по доске и спрыгнуть с одной из клеток на границе так, чтобы все клетки доски оказались черного цвета?

**Ответ:** Да, всегда.

**Решение:** Если маляр пробежит от угловой клетки до произвольной белой, потом вернется в угловую клетку по тому же маршруту, то указанная клетка поменяет цвет, а все остальные клетки останутся прежнего цвета. Таким образом можно менять цвет всех клеток, кроме угловой. Если ее цвет окажется черным, то маляр может просто спрыгнуть. а если белым, то маляр может пробежаться по периметру до нее и вернуться обратно тем же путем. Тогда ее цвет поменяется на черный.

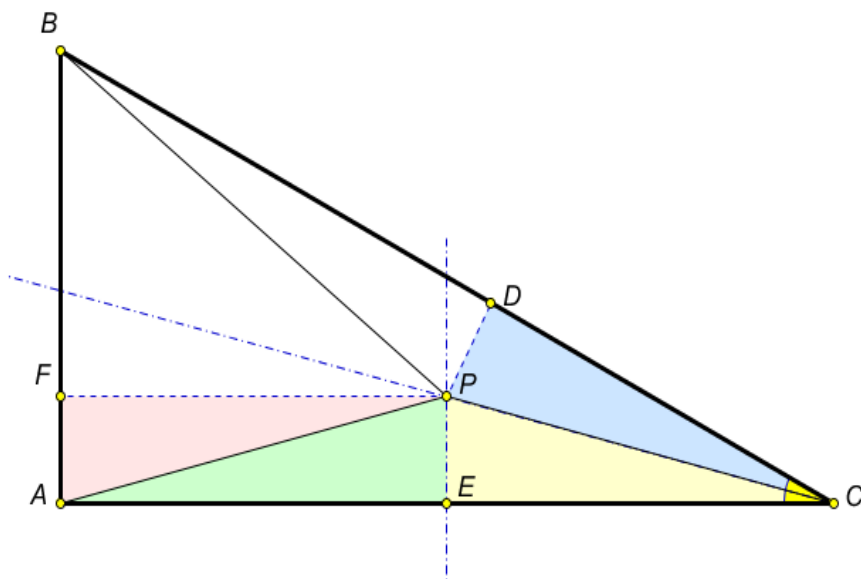
7. Саша и Максим (от нечего делать) написали в клетках таблицы  $100 \times 100$  ненулевые цифры. После этого Саша сказал, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждой строке, все делятся на 9. На это Максим ответил, что среди 100 чисел, образованных цифрами в каждом столбце, ровно одно не делится на 9. Докажите, что кто-то из них ошибся.

**Решение:** Если верить Саше, то сумма цифр в каждой строке делится на 9, следовательно общая сумма цифр в таблице тоже будет делиться на 9. Но если верить Максиму, то сумма цифр во всех столбцах кроме одного делится на 9, а следовательно, сумма цифр в таблице не делится на 9. Противоречие.

8. Точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Её соединили со всеми вершинами треугольника, а также опустили перпендикуляры из неё на стороны, образовав 6 треугольников. Оказалось, что 4 из них равны. Всегда ли это означает, что треугольник равнобедренный?

**Ответ:** Не обязательно..

**Решение:** Пример такого треугольника, не являющегося равнобедренным. Здесь,  $\triangle ABC$  — прямоугольный треугольник, точка  $P$  получена пересечением биссектрисы угла  $\angle BSA$  и серединного перпендикуляра к стороне  $AC$ .



9. Множество натуральных чисел называется *плохим*, если из него можно выбрать несколько чисел так, чтобы они в сумме давали 2012. Найдите наименьшее такое  $n$ , что числа 503, 504, ..., 2011 можно разбить на  $n$  множеств так, что все эти множества не были бы плохими.

**Ответ:**  $n = 2$ .

**Решение:** Покажем, что указанное множество можно разбить на два подмножества, так, чтобы оба не были плохими. Рассмотрим множества  $M_1 = \{503, 504, \dots, 671\}$ ,  $M_2 = \{672, 673, \dots, 1006\}$ ,  $M_3 = \{1007, 1008, \dots, 1340\}$ ,  $M_4 = \{1341, 1342, \dots, 2011\}$  и покажем, что  $M_1 \cup M_3$  и  $M_2 \cup M_4$  не являются плохими.

Докажем, что  $M_1 \cup M_3$  не плохое. Рассмотрим варианты:

- Четыре числа из множества  $M_1$  дают сумму  $S \geq 503 + 504 + 505 + 506 = 2018 > 2012$ ;
- Три числа из множества  $M_1$  дают сумму  $S \leq 669 + 670 + 671 = 2010 < 2012$ ;
- Два числа из множества  $M_1$  и одно из  $M_3$  дают сумму  $S \geq 503 + 504 + 1007 = 2014 > 2012$ ;
- Одно число из множества  $M_1$  и одно из  $M_3$  дают сумму  $S \leq 671 + 1340 = 2011 < 2012$ ;
- Два числа из  $M_3$  дают сумму  $S \geq 1007 * 3 = 2021 > 2012$ ;

Аналогично доказывается для  $M_2 \cup M_4$ .