Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Задания заключительного этапа 2012/2013 учебного года для 11 класса

Решения.

Вариант 1.

1. На покраску дома жёлтой краски потребовалось больше, чем белой на 20%, а коричневой краски – на 25% меньше, чем жёлтой. На сколько процентов коричневой и жёлтой краски суммарно потребовалось больше, чем белой?

Решение: Пусть x — количество белой краски. Тогда желтой краски потребовалось $\frac{6x}{5}$, а коричневой $\frac{3}{4}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{9x}{10}$. Отношение общего количества коричневой и желтой краски к количеству белой краски равно

$$\left(\frac{9x}{10}+\frac{6x}{5}\right):x=\frac{210}{100}.$$

$\square$

Ответ: На 110%.

2. Решить уравнение $\sqrt{6}\cos x+\sqrt{2}|\sin x|=2$.

Решение: Поделим уравнение на $\sqrt{8}$. При $\sin x\geq 0$ получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Longleftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Учитывая условие $\sin x\geq 0$, остается одна серия $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Если $\sin x\leq 0$, то получим уравнение

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Longleftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $x=-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$. Учитывая условие $\sin x\leq 0$, остается одна серия $x=-\frac{5\pi}{12}-2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. $\square$

Ответ: $x=\pm\frac{5\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

3. Решить неравенство $\log_{x^2+4x+3}(x-4)^2\cdot\log_{-x^2+3x+4}(3-x)^3\leq 0$.

Решение: Найдем ОДЗ переменной x. Для этого составим систему

$$\begin{cases}x^2+4x+3>0,\\ x^2+4x+3\neq 1,\\ (x-4)^2>0,\\ -x^2+3x+4>0,\\ -x^2+3x+4\neq 1,\\ (3-x)^3>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty),\\ x\neq -2\pm\sqrt{2},\\ x\neq 4,\\ x\in(-1;4),\\ x\neq\frac{3\pm\sqrt{21}}{2},\\ x<3.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-1;\tfrac{3-\sqrt{21}}{2}\right)\cup\left(\tfrac{3-\sqrt{21}}{2};-2+\sqrt{2}\right)\cup(-2+\sqrt{2};3).$$

Теперь найдем нули левой части: $x=2$ и определим ее знак на каждом интервале.

Ответ: $x\in\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2};-2+\sqrt{2}\right)\cup[2;3)$.

4. В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, а диагонали пересекаются в точке O, на отрезке BC выбрана точка K так, что $BK : CK = 2 : 3$, а на отрезке AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 3 : 2$. Найти площадь треугольника COD, если $AD = 7$, $BC = 3$, $KM = 6$ а $\cos\angle CAD = 1/5$.

РЕШЕНИЕ: Вначале докажем, что отрезок KM проходит через точку O. Треугольники AOD и COB подобны, а значит $DO : BO = AO : CO = AD : BC = 7 : 3$. Проведем прямую KO и обозначим точку ее пересечения с отрезком AD через N. Треугольники DON и BOK подобны, а значит $DN : BK = DO : BO = NO : OK = 7 : 3$. Аналогично, $AN : CK = AO : CO = 7 : 3$. Поделим первое из этих равенств на второе и получим $DN : AN = BK : CK$, т.е. точка N совпадает с точкой M, а значит отрезок KM совпадает с отрезком KN и проходит через точку O.
По условию $BK = 6/5$, $CK = 9/5$, $AM = 21/5$, $DM = 14/5$. В силу подобия треугольников, $KO : OM = 3 : 7$, откуда $KO = 9/5$, $OM = 21/5$. Найдем AO из теоремы косинусов в треугольнике AOM:

$$OM^2 = AM^2 + AO^2 - 2 \cdot AO \cdot AM \cdot \cos\angle CAM \iff AO = \frac{42}{25}.$$

Тогда $CO = \frac{3}{7}AO = \frac{18}{25}$, а $AC = \frac{12}{5}$. Высоту трапеции CH можно найти из прямоугольного треугольника: $CH = AC\sin\angle CAD = \frac{24\sqrt{6}}{25}$. В силу подобия, высоты в треугольниках AOD и BOC равны, соответственно, $\frac{7}{10}CH = \frac{84\sqrt{6}}{125}$ и $\frac{3}{10}CH = \frac{36\sqrt{6}}{125}$. Тогда можно найти площадь трапеции и площади треугольников AOD и BOC:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3+7)\frac{24\sqrt{6}}{25} = \frac{24\sqrt{6}}{5}, \quad S_{AOD} = \frac{7}{2} \cdot \frac{84\sqrt{6}}{125} = \frac{294\sqrt{6}}{125}, \quad S_{BOC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{36\sqrt{6}}{125} = \frac{54\sqrt{6}}{125}.$$

Поскольку в любой трапеции площади треугольников AOB и COD равны, окончательно получаем

$$S_{COD} = \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{AOD} - S_{BOC}) = \frac{126\sqrt{6}}{125}.$$

□

ОТВЕТ: $S_{COD} = \frac{126\sqrt{6}}{125}$.

5. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{4^y+4^{-y}}{2}\right) = y$ для любого $y \geq 0$. Для каждого значения $a \neq 0$ найти все решения неравенства $f\left(\frac{a}{x-2a}\right) \leq 1$.

РЕШЕНИЕ: Функция $g(y) = \frac{4^y+4^{-y}}{2}$ монотонно возрастает при $y \geq 0$, принимая значения $[1; +\infty)$. По условию, функция f является обратной к g функцией, а значит также монотонно возрастает. Тогда

$$f\left(\frac{a}{x+2a}\right) \leq 1 \iff \frac{a}{x+2a} \leq g(1)$$

при условии, что функция f определена, т.е. при условии $\frac{a}{x+2a} \geq 1$. Остается решить систему

$$\begin{cases} \frac{a}{x+2a} \leq \frac{17}{8}, \\ \frac{a}{x+2a} \geq 1. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{17x+26a}{x+2a} \geq 0, \\ \frac{x+a}{x+2a} \leq 0. \end{cases}$$

При $a > 0$ получим

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -2a) \cup \left[-\frac{26a}{17}; +\infty\right), \\ x \in (-2a; -a], \end{cases} \iff x \in \left[-\frac{26a}{17}; -a\right].$$

При $a < 0$ получим

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{26a}{17}\right] \cup (-2a; +\infty), \\ x \in [-a; -2a), \end{cases} \iff x \in \left[-a; -\frac{26a}{17}\right].$$

Ответ: При $a > 0$: $x \in \left[-\frac{26a}{17}; -a\right]$. При $a < 0$: $x \in \left[-a; -\frac{26a}{17}\right]$.

6. В коробке у Маши лежит 25 новогодних шаров, которыми Маша начинает украшать елку. Каждый шар она сначала в течении 10 секунд выбирает в коробке, а затем в течении 15 секунд вешает на елку. Два ее младших брата Саша и Паша незаметно снимают шары с елки и прячут среди своих игрушек. Дождавшись момента, когда Маша начинает искать в коробке очередной шар, один из братьев (но не оба) может снять с елки один шар (на это ему требуется ровно 10 секунд). После этого, на то, чтобы спрятать украденный шар, у Саши уходит 50 секунд, после чего он готов украсть с елки следующий шар, а Паша прячет шар за одну минуту и 50 секунд. Какое наименьшее число шаров может висеть на елке в тот момент, когда Маша повесит свой последний шар?

Решение: Назовем *циклом* последовательность двух действий — Маша выбирает шар в коробке и вешает его на елку. Продолжительность цикла 25 секунд. По условию, воровать шар каждый из братьев может только в начале цикла. Тогда у Саши на один шар уходит 3 цикла или 75 секунд, а у Паши — 5 циклов или 125 секунд. Воровать шары братья могут начать только со второго цикла. Тогда за оставшиеся 24 цикла Саша может украсть максимум 8 шаров, а Паша — максимум 5 шаров, так что на елке будет висеть минимум 12 шаров. Остается показать, что это возможно, предъявив последовательность действий. Пусть Саша ворует в циклы 2, 5, 9, 12, 15, 18, 21, 24, а Паша — в циклы 3, 8, 13, 19, 25. □

Ответ: 12.

7. Три велосипедиста одновременно начинают двигаться в одной плоскости по трем концентрическим окружностям с общим центром O и радиусами $R_1 = 20$м для первого, $R_2 = 40$м для второго и $R_3 = 80$м для третьего велосипедиста. В начальный момент времени велосипедисты находятся на одном луче с вершиной в точке O. Все велосипедисты двигаются против часовой стрелки с постоянными скоростями, причем скорость первого велосипедиста в два раза больше скорости второго, но в два раза меньше скорости третьего. Велосипедисты продолжают свое движение до тех пор, пока не закончит свой полный круг последний из них (тот, кто потратит на объезд своего круга больше всего времени). Сколько раз за это время они окажутся на одной прямой, не проходящей через центр O?

Решение: Выберем систему координат так, чтобы в начальный момент все велосипедисты находились на луче Ox. При движении точки по окружности радиуса R с такой начальной точкой длина пройденного пути равна $R\alpha$, где α — тригонометрический угол. Обозначим скорость второго велосипедиста через v — тогда скорость первого равна $2v$, а третьего — $4v$. Заметим, что координаты точки, лежащей на окружности с центром в начале координат радиуса R есть $x = R\cos\alpha$, $y = R\sin\alpha$, где α — тригонометрический угол. Тогда в момент времени t путь пройденный велосипедистом есть $vt = R\alpha$, а тогда координаты велосипедистов равны

$$\begin{cases} x_1 = 20\cos\left(\frac{2vt}{20}\right), \\ y_1 = 20\sin\left(\frac{2vt}{20}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 40\cos\left(\frac{vt}{40}\right), \\ y_2 = 40\sin\left(\frac{vt}{40}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 80\cos\left(\frac{4vt}{80}\right), \\ y_3 = 80\sin\left(\frac{4vt}{80}\right) \end{cases}.$$

Три точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $(x_1 - x_2)(y_3 - y_2) = (x_3 - x_2)(y_1 - y_2)$. Обозначим $\varphi = \frac{vt}{40}$ и составим уравнение

$$(20\cos 4\varphi - 40\cos\varphi)(80\sin 2\varphi - 40\sin\varphi) = (20\sin 4\varphi - 40\sin\varphi)(80\cos 2\varphi - 40\cos\varphi).$$

Заметим, что последним полный круг сделает второй велосипедист, так что нам надо найти число решений этого уравнения на отрезке $\varphi \in [0, 2\pi]$. Учтем теперь то, что прямая не должна проходить через начало координат, т.е.

$$-40\cos\varphi(80\sin 2\varphi - 40\sin\varphi) \neq -40\sin\varphi(80\cos 2\varphi - 40\cos\varphi).$$

Раскроем скобки и получим $\sin 2\varphi \cos\varphi \neq \sin\varphi \cos 2\varphi$, т.е. $\sin\varphi \neq 0$. Вернемся к нашему уравнению. После преобразований получим $2\sin(2\varphi) + 4\sin\varphi - \sin(3\varphi) = 0$, откуда $4\sin\varphi\cos\varphi + 4\sin^3\varphi + \sin\varphi$, откуда $4\cos^2\varphi - 4\cos\varphi - 5 = 0$, откуда $\cos\varphi = \frac{1\pm\sqrt{6}}{2}$. На тригонометрическом круге получим два решения. □

ОТВЕТ: 2 РАЗА.

8. В пирамиде $FABC$ $AB = BC$, $FB = FK$, где K — середина отрезка AC, а тангенс угла между плоскостями FAB и ABC оотносится к тангенсу угла между плоскостями FBC и ABC как $1:3$. Плоскость π паралаллельна AB, делит ребро FC в отношении $1:4$, считая от вершины F, и проходит через основание O высоты FO пирамиды $FABC$. Найти отношение объемов многогранников, на которые делит эта плоскость пирамиду $FABC$.

ОТВЕТ: $5:11$ или $1:19$.

РЕШЕНИЕ: 1) Докажем, что основание высоты (точка O) лежит на средней линии $\triangle ABC$. Треугольники FOB и FOK равны (они прямоугольные, FO — общая, а $FB = FK$), тогда $BO = OK$. В плоскости основания ABC проведем прямую l, проходящую через точку O параллельно AC и обозначим $L = l \cap BK$, $M = l \cap AB$, $N = l \cap BC$. Так как $AB = BC$, то медиана $BK \perp AC$, а значит $OL \perp BK$. Тогда треугольники BOL и KOL равны (они прямоугольные с общей OL и равными $BO = OK$), тогда $BL = KL$, т.е. MN — средняя линия треугольника ABC.
2) Найдем отношение $OM : ON$. Из точки O проведем перпендикуляры OH_1 к стороне AB и OH_2 к стороне BC и обозначим $\angle FH_1O = \alpha$, $\angle FH_2O = \beta$. Плоскость FH_1O перпендикулярна и плоскости ABC и боковой грани FAB, т.е. α есть угол между плоскостями FAB и ABC. Аналогично, β есть угол между плоскостями FBC и ABC. Из треуголников FOH_1 и FOH_2 найдем $OH_1 = FO\cdot\operatorname{ctg}\alpha$, $OH_2 = FO\cdot\operatorname{ctg}\beta$. Из условия теперь следует, что $OH_1 : OH_2 = 3:1$. Треугольники OMH_1 и ONH_2 подобны (они прямоугольные и $\angle OMH_1 = \angle ONH_2$), а значит $OM : ON = 3:1$.
3) Первый случай. Предположим, что точка O лежит внутри треугольника ABC. В плоскости ABC проведем прямую m через точку O параллельно AB. По условию эта прямая лежит в секущей плоскости π. Обозначим $P = m \cap AC$, $Q = m \cap BC$. Из теоремы Фалеса $BQ = 3QN$. Поскольку MN — средняя линия, получим $CQ : CB = CP : CA = 5:8$. Обозначим точку пересечения плоскости pi и ребра FC через R — по условию $CR : CF = 4:5$. Итак, плоскость π пересекает ребра AC, BC и FC в точках P, Q и R, а значит

$$\frac{V_{CPQR}}{V_{CABF}} = \frac{CP\cdot CQ\cdot CR}{CA\cdot CB\cdot CF} = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5} = \frac{5}{16}.$$

Тогда объемы многогранников $CPQR$ и $ABQPRF$ относятся как $5:11$.
4) Второй случай. Предположим, что точка O лежит вне треугольника ABC. Тогда $MN : NO = 2:1$. Аналогично получим $BN : NQ = 2:1$, а т.к. MN — средняя линия, $CQ : CB = CP : CA = 1:4$. Тогда $V_{CPQR} : V_{CABF} = 1:20$. Тогда объемы многогранников $CPQR$ и $ABQPRF$ относятся как $1:19$. □

ОТВЕТ: $5:11$ или $1:19$.