Олимпиада «Ломоносов» по математике
Условия, ответы и краткие решения заданий отборочного этапа
(9 и 10 классы, 2010/2011 учебный год)

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое больше суммы своих цифр на 1755 (год основания Московского университета).

Ответ: 1770.

Решение. Из условия следует, что искомое число не может состоять из трёх и менее цифр. Будем искать наименьшее такое число в виде $\overline{abcd}$, где a, b, c, d — цифры, причём $a \neq 0$. Составим уравнение:

$$\overline{abcd} = a + b + c + d + 1755 \Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c + d = a + b + c + d + 1755 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 999a + 99b + 9c = 1755 \Leftrightarrow 111a + 11b + c = 195.$$

Из последнего уравнения заключаем, что единственное возможное значение цифры a равно 1. Далее, получаем уравнение $11b+c = 84$, а значит, цифра b может быть равна только 7. Наконец, остаётся найти значение $c = 84 - 11 \cdot 7 = 7$. Итак, искомым числом является 1770, поскольку из всех чисел вида $\overline{177d}$ оно является наименьшим.

2. Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объём больше и насколько?

Ответ: у второго на $19\frac{1}{21}\%$ *больше (у первого меньше на 16%).*

Решение. Пусть a, b и c — длина, ширина и высота соответственно второго куска сыра. Тогда его объём равен $V_2 = abc$. По условию, объём первого куска сыра равен $V_1 = \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{5}b \cdot \frac{7}{10}c = \frac{84}{100}V_2$. Следовательно, $V_2 = \frac{25}{21}V_1 = 1\frac{4}{21}V_1$, а $\frac{4}{21} = 19\frac{1}{21}\%$.

3. Пройдя 2/5 длины узкого моста, пешеход заметил, что сзади к мосту приближается машина. Тогда он пошёл назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы пешеход продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

Ответ: 5.

Решение. За время t, которое пешеход двигался навстречу машине до встречи у начала моста, он прошёл 2/5 длины моста. Следовательно, если бы пешеход продолжал идти вперёд, то за время t он прошёл бы ещё 2/5 длины моста и ему осталось бы пройти 1/5 длины моста, а согласно условию, машина за время t подъехала бы к началу моста и до встречи с пешеходом ей осталось бы проехать мост целиком. Значит, отношение скорости машины к скорости пешехода равно 5.

4. Дано простое число p. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 = y^2 + 2010p$.

Ответ: $(1006, 1004)$, $(338, 332)$, $(206, 196)$, $(82, 52)$ *при* $p = 2$. *При* $p \neq 2$ *решений нет.*

Решение. Представим уравнение в виде

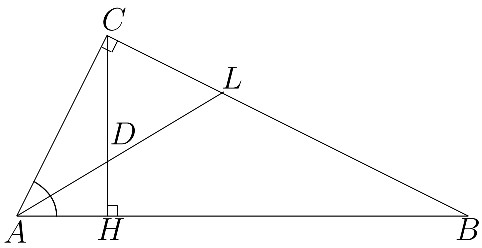
$$(x - y)(x + y) = 2010p.$$

Поскольку число $2010p$ чётно, хотя бы одно из чисел $x - y$, $x + y$ делится на 2, а значит, числа x и y одинаковой чётности. Следовательно, оба числа $x - y$, $x + y$ чётные, а их произведение делится на 4. Возможны два случая:

1) $p \geqslant 3$. В этом случае решений нет, так как $(x - y)(x + y)$ делится на 4, а $2010p = 2 \cdot 1005p$ на 4 не делится.

2) $p = 2$. В этом случае уравнение принимает вид $(x - y)(x + y) = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$. Отсюда с учётом условия $0 < x - y < x + y$ получаем четыре варианта, каждый из которых даёт решение исходного уравнения:

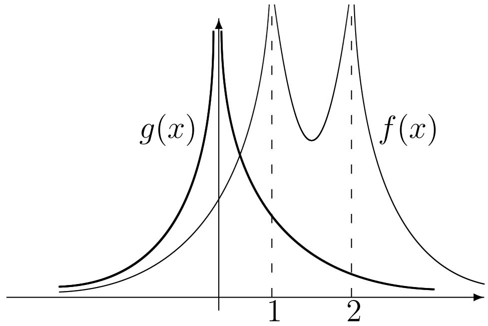
$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 2010, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 670, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 10, \\ x + y = 402, \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 30, \\ x + y = 134. \end{cases}$$



5. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении 5 : 2, считая от вершины. Найти величину этого угла.
Ответ: $\arccos\frac{5}{7}$.
Решение. Пусть $AD = 5x$, $DL = 2x$. Тогда $\cos\angle LAH = = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AH}{5x} = \cos\angle LAC = \dfrac{AC}{AL} = \dfrac{AC}{7x}$. Следовательно, $\cos\angle CAH = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{5}{7}$.

6. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2}?$$



Ответ: 1.
Решение. Введём в рассмотрение функции

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} \quad \text{и} \quad g(x) = \frac{2}{x^2}.$$

При $x < 0$ выполнены неравенства $x-2 < x-1 < x < 0$, следовательно, $\frac{1}{(x-1)^2} < \frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{(x-2)^2} < \frac{1}{x^2}$, поэтому $f(x) < g(x)$, а значит, при $x < 0$ уравнение не имеет решений.

На промежутке $(0;1)$ функция f возрастает от $\frac{5}{4}$ (не включая) до $+\infty$, так как

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-2)^3} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0;1),$$

а функция g убывает от $+\infty$ до 2 (не включая), так как $g'(x) = \dfrac{-4}{x^3} < 0$ при $x \in (0;1)$. Следовательно, на этом промежутке уравнение имеет ровно 1 решение.

На промежутке $(1;2)$ имеем $f(x) \geqslant f(\frac{3}{2}) = 8$, а $g(x) < g(1) = 2$, следовательно, на этом промежутке уравнение не имеет решений.

При $x > 2$ выполнены неравенства $0 < x-2 < x-1 < x$, следовательно, $\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{(x-2)^2} > \frac{1}{x^2}$, поэтому $f(x) > g(x)$, значит, при $x > 2$ уравнение не имеет решений.

Второй вариант решения.

Исходное уравнение при условиях $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ равносильно уравнению $6x^3 - 21x^2 + 24x - 8 = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 24x - 8$. Поскольку $f'(x) = 18x^2 - 42x + 24$, то $x = 1$ — точка максимума, а $x = \frac{4}{3}$ — точка минимума. На области $(-\infty, 1) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$ функция f возрастает, на промежутке $(1; \frac{4}{3})$ убывает. Так как $f(0) = -8$, $f(1) = 1$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{8}{9}$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень, который лежит на промежутке $(0;1)$.

7. Даны три точки, расстояния между которыми равны 4, 6 и 7. Сколько существует попарно не равных друг другу треугольников, для которых каждая из этих точек — либо вершина, либо середина стороны?
Ответ: 11.
Решение. Перечислим все построения треугольников, удовлетворяющих условию задачи, с указанием длин сторон.

	Описание треугольника		Длины сторон
№1	Все точки — вершины		4, 6, 7
	Одна точка — вершина, две — середины сторон		
№2		Вершина при продолжении сторон длины 4 и 6 обеих	8, 12, 14
№3		продолжение стороны длины 4	8, 14, $2\sqrt{94}$
№4		продолжение стороны длины 6	12, 14, $2\sqrt{154}$
№5		Вершина при продолжении сторон длины 4 и 7 обеих	8, 12, 14
№6		продолжение стороны длины 4	8, 12, $2\sqrt{55}$
№7		продолжение стороны длины 7	12, 14, $2\sqrt{154}$
№8		Вершина при продолжении сторон длины 6 и 7 обеих	8, 12, 14
№9		продолжение стороны длины 6	8, 12, $2\sqrt{55}$
№10		продолжение стороны длины 7	8, 14, $2\sqrt{94}$
	Две точки — вершины, одна — середина стороны		
№11		вершины при стороне длины 4 продолжается сторона длины 7	4, 14, $\sqrt{154}$
№12		продолжается сторона длины 6	4, 12, $\sqrt{154}$
№13		вершины при стороне длины 6 продолжается сторона длины 4	6, 8, $\sqrt{94}$
№14		продолжается сторона длины 7	6, 14, $\sqrt{94}$
№15		вершины при стороне длины 7 продолжается сторона длины 4	7, 8, $\sqrt{55}$
№16		продолжается сторона длины 6	7, 12, $\sqrt{55}$
№17	Все точки — середины сторон		8,12,14

Итак, существуют 17 способов построения, приводящих к 11 различным треугольникам.

8. В коммерческом турнире по футболу участвовало пять команд. Каждая должна была сыграть с каждой ровно один матч. В связи с финансовыми трудностями организаторы некоторые игры отменили. В итоге оказалось, что все команды набрали различное число очков и ни одна команда в графе набранных очков не имеет нуля. Какое наименьшее число игр могло быть сыграно в турнире, если за победу начислялось три очка, за ничью — одно, за поражение — ноль?

Ответ: 6.

Решение. Минимальная возможная сумма баллов: $1+2+3+4+5=15$. За одну игру можно набрать максимум 3 балла (в сумме). Значит, игр было не менее 5. Однако если было бы ровно 5 игр, то все игры должны были бы закончиться победой одной из команд, а тогда никакая команда не набрала бы ровно 1 балл.

Значит, игр минимум 6. Пример результатов турнира зададим таблицей.

$*$	1	2	3	4	5	$\sum$
1	$*$	$*$	$*$	3	3	6
2	$*$	$*$	$*$	$*$	3	3
3	$*$	$*$	$*$	1	3	4
4	0	$*$	1	$*$	1	2
5	0	0	0	1	$*$	1

9. Строго внутри окружности даны различные точки A и B. Где на окружности должна быть расположена точка C, чтобы угол ACB был наибольшим возможным? Укажите все варианты и обоснуйте, что иных нет.

Ответ: одна из точек (или обе точки) касания окружности, проходящей через A и B, с исходной окружностью. Таких окружностей две, нужно выбирать ту, для которой угол больше.

Решение. Проведем прямую c через точки A и B. Построим окружности ω_1 и ω_2, проходящие через точки A и B и касающиеся исходной окружности Ω в точках C_1 и C_2. (Один из возможных способов построения таков: построить любую окружность через A и B, пересекающую Ω; построить общую секущую двух окружностей, она пересечет прямую c в точке M; из точки M провести касательные к Ω; точки касания и будут C_1 и C_2.)

Все точки C на Ω, лежащие по ту же сторону от прямой c, что и точка C_1, таковы, что $\angle ACB < \angle AC_1B$. Аналогично угол $\angle AC_2B$ самый большой среди лежащих по ту сторону прямой c, по которую лежит точка C_2.

10. Что больше: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}$ или $\frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2011}$?

Ответ: правое число больше.

Решение. Обозначим сумму вида $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ через H_n. Тогда левую часть можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2010}\right) + 1 - H_{2011} = H_{1005} + 1 - H_{2011},$$

а правую часть можно преобразовать так:

$$\frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2011} = H_{2011} - H_{1005}.$$

Осталось сравнить $H_{1005} + 1 - H_{2011}$ и $H_{2011} - H_{1005}$. Если $H_{1005} + 1 - H_{2011} \vee H_{2011} - H_{1005}$, то $H_{1005} + 1/2 \vee H_{2011}$, то есть $\frac{1}{2} \vee \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2011}$. Далее ясно, что

$$\frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \ldots + \frac{1}{2011} > \underbrace{\frac{1}{2010} + \frac{1}{2010} + \ldots + \frac{1}{2010}}_{\text{1005 слагаемых}} + \frac{1}{2011} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2011} > \frac{1}{2}.$$