Олимпиада «Ломоносов» по математике
Условия, ответы и краткие решения заданий отборочного этапа
(8 класс, 2010/2011 учебный год)

1. Избавившись от колорадского жука, фермер стал собирать с 24 га столько картофеля, сколько прежде собирал с 27 га. На сколько процентов повысилась урожайность картофеля?
Ответ: 12,5%.
Решение. С 24 га фермер стал собирать в $27/24 = 1{,}125$ раза больше картофеля, чем прежде. Значит, урожайность картофеля повысилась на 12,5%.

2. Могут ли две биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаться под прямым углом?
Ответ: Нет.
Решение. Предположим противное: пусть в некотором треугольнике ABC биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle C$ пересекаются под прямым углом в точке K (см. рис. 1). Поскольку сумма углов треугольника AKC равна $180°$, а $\angle AKC = 90°$, то сумма двух оставшихся углов равна $\angle KAC + \angle KCA = 90°$. Но по условию, AK — биссектриса угла $\angle BAC$, поэтому $\angle BAC = 2\angle KAC$, и аналогично $\angle BCA = 2\angle KCA$. Следовательно, $\angle BAC + \angle BCA = 2(\angle KAC + \angle KCA) = 180°$. С другой стороны, сумма углов треугольника ABC также равна $180°$, поэтому $\angle BAC + \angle BCA = 180° - \angle ABC < 180°$. Противоречие.

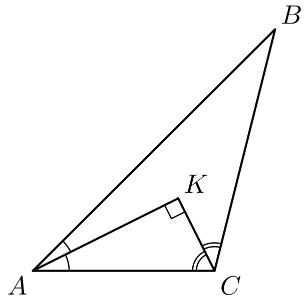
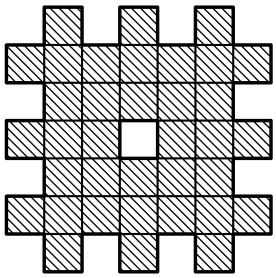


Рис. 1.

3. Решите уравнение
$$\frac{x^7-1}{x^5-1} = \frac{x^5-1}{x^3-1}.$$

Ответ: $0,\ -1$.
Решение. При $x \neq 1$ оба знаменателя отличны от нуля, и по правилу пропорции данное уравнение принимает вид
$$(x^7-1)(x^3-1) = (x^5-1)^2 \Leftrightarrow x^7 - 2x^5 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)^2(x+1)^2 = 0.$$
Левая часть последнего уравнения обращается в нуль при $x = -1$, 0 и 1, но в ответ входят лишь два значения: $x = -1$ и 0, поскольку при $x = 1$ исходные дроби смысла не имеют.

4. Можно ли фигуру, изображённую на рисунке, разрезать по клеточкам на четыре равные части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?



Ответ: Да.
Решение. Способ разрезать фигуру и сложить из получившихся частей квадрат 6×6 показан на рис. 2.

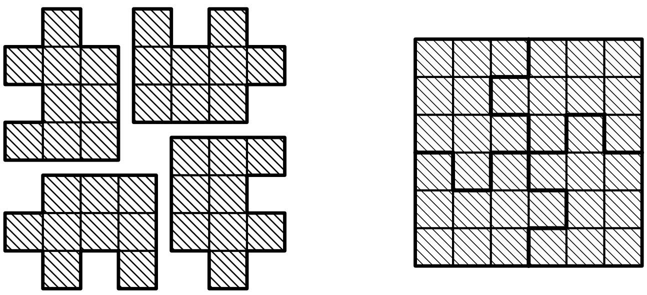


Рис. 2.

5. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились два поезда. Известно, что в 14:00 они встретились и, не меняя скорости, продолжили движение. Один поезд прибыл в пункт B в 18:00, а другой прибыл в пункт A в 23:00. В какой момент времени поезда отправились в путь?

Ответ: 8:00.

Решение. Пусть поезда отправились за t часов до момента встречи и пусть v_1 — скорость первого поезда, v_2 — скорость второго. Тогда первый поезд прошел расстояние tv_1 от пункта A до пункта встречи с вторым поездом, а второй поезд прошёл это же расстояние (после встречи с первым поездом) за 9 часов, поэтому $tv_1 = 9v_2$. Аналогично, второй поезд прошел расстояние tv_2 от пункта B до пункта встречи, а первый поезд затем прошел это расстояние за 4 часа, поэтому $tv_2 = 4v_1$. Перемножая два этих уравнения, получим

$$tv_1 \cdot tv_2 = 9v_2 \cdot 4v_1 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad t = 6.$$

Итак, поезда отправились в путь за 6 часов до 14:00, т. е. в 8:00.

6. Вычислите

$$\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2} - \frac{(a-b)(a^4-b^4)}{a^2-b^2} \qquad \text{при} \quad a = -1,\underbrace{5\ldots5}_{2010}6, \quad b = 5,\underbrace{4\ldots44}_{2011}.$$

Ответ: 343.

Решение. При заданных a и b получаем

$$\frac{2ab(a^3-b^3)}{a^2+ab+b^2} - \frac{(a-b)(a^4-b^4)}{a^2-b^2} = 2ab(a-b) - (a-b)(a^2+b^2) =$$
$$= -(a-b)(a^2-2ab+b^2) = -(a-b)^3 = -(-7)^3 = 343.$$

7. Петя последовательно выписывает целые числа, начиная с 21, так, что каждое следующее число меньше предыдущего на 4, а Вася, глядя на очередное число, подсчитывает сумму всех выписанных к этому моменту чисел. Какая из найденных Васей сумм окажется ближайшей к 55?

Ответ: 56.

Решение. Составим таблицу, в первой строке которой будем записывать числа вслед за Петей, а во второй строке поместим результаты Васиных вычислений.

21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	…
21	38	51	60	65	66	63	56	45	…

Поскольку числа, которые будет далее выписывать Вася, отрицательны, подсчитываемая Колей сумма будет убывать, удаляясь от 55. Значит, ближайшей к 55 окажется сумма, равная 56.

8. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными сторонам, на несколько прямоугольников так, как показано на рисунке. Площади некоторых из них известны и отмечены на рисунке, а площади a, b, c неизвестны. Найдите a, b, c.

	45	a	
143	99		264
91		35	
78	b		c

Ответ: $a = 25$, $b = 54$, $c = 144$.

Решение. Площадь прямоугольника, отмеченного числом 143, относится к площади прямоугольника, отмеченного числом 78, так же, как 99 относится к b, и так же, как 264 относится к c (это отношение равно отношению вертикальных сторон прямоугольников в первой и третьей снизу строках):

$$143 : 78 = 99 : b = 264 : c \quad \Rightarrow \quad b = \frac{78 \cdot 99}{143} = 54, \quad c = \frac{78 \cdot 264}{143} = 144.$$

Чтобы вычислить значение a, найдём сначала площадь прямоугольника в левом верхнем углу (пусть она равна x). Для этого рассмотрим отношение вертикальных сторон прямоугольников в первой и второй сверху строках:

$$x : 143 = 45 : 99 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{143 \cdot 45}{99} = 65.$$

Зная теперь значение x, таким же способом найдём a, рассматривая отношение вертикальных сторон прямоугольников в первой и третьей сверху строках:

$$x : 91 = a : 35 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{x \cdot 35}{91} = \frac{65 \cdot 35}{91} = 25.$$

9. Найдите наименьшее натуральное число, которое больше суммы своих цифр на 1755 (год основания Московского университета).
Ответ: 1770.
Решение. Из условия следует, что искомое число не может состоять из трёх и менее цифр. Будем искать наименьшее такое число в виде $\overline{abcd}$, где a, b, c, d — цифры, причём $a \neq 0$. Составим уравнение:

$$\overline{abcd} = a + b + c + d + 1755 \Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c + d = a + b + c + d + 1755 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 999a + 99b + 9c = 1755 \Leftrightarrow 111a + 11b + c = 195.$$

Из последнего уравнения заключаем, что единственное возможное значение цифры a равно 1. Далее, получаем уравнение $11b+c = 84$, а значит, цифра b может быть равна только 7. Наконец, остаётся найти значение $c = 84 - 11 \cdot 7 = 7$. Итак, искомым числом является 1770, поскольку из всех чисел вида $\overline{177d}$ оно является наименьшим.