

Рис. 3.

4. На огромном лугу пасётся барашек, привязанный двумя верёвками к двум колам (к каждому — своей верёвкой).

а) Какой окажется фигура на лугу, с которой барашек сможет съесть траву?

б) Посередине между колами растёт роза, а расстояние между колами равно 20 м. Какими должны быть длины верёвок, чтобы барашек не смог съесть розу?

Ответ: б) Ровно одна из верёвок короче 10 м.

Решение. а) Искомая фигура — пересечение двух кругов с центрами в колах и радиусами, равными соответственно длинам  $l_1$  и  $l_2$  первой и второй верёвок. Поэтому это может быть или фигура, закрашенная на рис. 3, или

полный круг. Последний случай имеет место, если  $|l_1 - l_2| \geq r$ , где  $r$  — расстояние между колами, поскольку тогда один из кругов полностью лежит в другом, и искомая фигура совпадает с кругом меньшего радиуса.

б) Чтобы роза не попадала в фигуру на лугу, с которой барашек может съесть траву, она должна лежать вне одной из окружностей, ограничивающих эту фигуру. Расстояние от неё до каждого из колов равно  $r/2 = 20/2 = 10$  м, поэтому длина одной из верёвок должна быть меньше 10 м.

5. Какое из чисел больше:  $\frac{\overbrace{77\dots7}^{2009}}{\underbrace{77\dots77}_{2010}}$  или  $\frac{\overbrace{33\dots3}^{2010}}{\underbrace{33\dots33}_{2011}}$ ?

Ответ: Второе.

Решение. Поскольку

$$\frac{\overbrace{77\dots7}^{2009}}{\underbrace{77\dots77}_{2010}} = \frac{\overbrace{11\dots1}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}} = \frac{\overbrace{11\dots11}^{2010} - \overbrace{100\dots0}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}} = 1 - \frac{\overbrace{100\dots0}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}}$$

и

$$\frac{\overbrace{33\dots3}^{2010}}{\underbrace{33\dots33}_{2011}} = \frac{\overbrace{11\dots1}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}} = \frac{\overbrace{11\dots11}^{2011} - \overbrace{100\dots0}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}} = 1 - \frac{\overbrace{100\dots0}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}},$$

достаточно сравнить дроби

$$\frac{\overbrace{100\dots0}^{2009}}{\underbrace{11\dots11}_{2010}} \quad \text{и} \quad \frac{\overbrace{100\dots0}^{2010}}{\underbrace{11\dots11}_{2011}}.$$

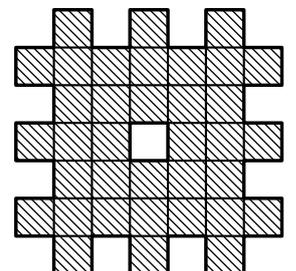
Первая из них больше, так как для обратных к ним чисел справедливо неравенство

$$\frac{\overbrace{11\dots11}^{2010}}{\underbrace{100\dots0}^{2009}} = 1, \overbrace{11\dots11}^{2009} < 1, \overbrace{11\dots11}^{2010} = \frac{\overbrace{11\dots11}^{2011}}{\underbrace{100\dots0}^{2010}}.$$

6. Можно ли фигуру, изображённую на рисунке, разрезать по клеточкам на четыре равные части так, чтобы из них можно было сложить квадрат?

Ответ: Да.

Решение. Способ разрезать фигуру и сложить из получившихся частей



квадрат  $6 \times 6$  показан на рис. 4.

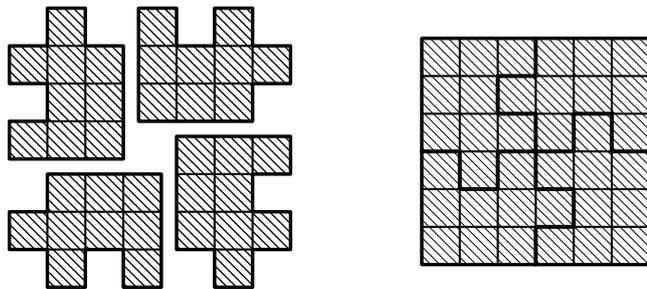


Рис. 4.

7. Из-за пробки на выезде из города междугородный автобус прошёл первую треть пути в полтора раза медленнее расчётного времени. Сможет ли автобус без опоздания прибыть в пункт назначения, если на оставшейся части пути увеличит скорость на треть?

*Ответ:* Да.

*Решение.* На прохождение первой трети пути автобус затратил  $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$  часть расчётного времени. Если он увеличит скорость на треть, то оставшиеся две трети пути он пройдёт за  $\frac{2/3}{4/3} = \frac{1}{2}$  часть расчётного времени, а значит, сможет прибыть в пункт назначения без опоздания.

8. Прямоугольник разбили прямыми, параллельными сторонам, на несколько прямоугольников так, как показано на рисунке. Площади некоторых из них известны и отмечены на рисунке, а площади  $a$  и  $b$  неизвестны. Найдите  $a$  и  $b$ .

$a$		54	66
	104		143
25	40		$b$

*Ответ:*  $a = 30$ ,  $b = 55$ .

*Решение.* Площадь прямоугольника, отмеченного числом 104, относится к площади прямоугольника, отмеченного числом 40, так же, как 143 относится к  $b$  (это отношение равно отношению вертикальных сторон прямоугольников во второй и первой снизу строках):

$$104 : 40 = 143 : b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{143 \cdot 40}{104} = 55.$$

Зная значение  $b$ , таким же образом найдём площадь  $a$ , рассматривая отношение вертикальных сторон прямоугольников в первой и третьей строках:

$$25 : a = b : 66 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{66 \cdot 25}{b} = \frac{66 \cdot 25}{55} = 30.$$