ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2020-2021 учебный год

ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Вопрос 1.
Карстовые процессы развиваются в породах **Гипс, доломит**
К аккумулятивной форме рельефа относится **Бархан**
Наиболее интенсивно процесс химического выветривания происходит в **Влажных тропиках**
Отложения временных водных потоков в их приустьевой части в виде конусов выноса называются **Пролювий**

Вопрос 2.
Мы живём в **Кайнозое**
Динозавры жили в **Мезозое**
Кораллы - это **Бентос**
На кого похож белемнит? **Кальмар**

Вопрос 3.
В ювелирной промышленности используется **Турмалин**
В сельском хозяйстве используется **Апатит**
В цементной промышленности используется **Мергель**
Оранжевой минеральной краской является **Реальгар**

Вопрос 4.
Какой термин лишний? **Вулкан**
Какой термин лишний? **Шлих**
Какой термин лишний? **Аллювий**
Какой термин лишний? **Гранит**

Вопрос 5.

На какой фотографии изображен двойник?

На какой фотографии изображено клиф?

На какой фотографии изображен пегматит?

На какой фотографии изображена фумарола?

Задание 6. Вариант 1.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 2.71 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 5 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0],\ 0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр а отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}}$, $y = a(x - \sqrt{\frac{h}{-a}})^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi\, x^2 dy = \frac{\pi}{-a}\int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 8.23 м

Задание 6. Вариант 2.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 3.14 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 5 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0],\ 0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}},\ y = a(x - \sqrt{\frac{h}{-a}})^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi\, x^2 dy = \frac{\pi}{-a} \int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 8.86 м

Задание 6. Вариант 3.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 3.74 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 5 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0]$, $0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}}$, $y = a(x - \sqrt{\frac{h}{-a}})^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi x^2 dy = \frac{\pi}{-a} \int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 9.67 м

Задание 6. Вариант 4.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 3.93 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 5 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0]$, $0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}}$, $y = a\left(x - \sqrt{\frac{h}{-a}}\right)^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi x^2 dy = \frac{\pi}{-a} \int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 9.91 м

Задание 6. Вариант 5.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 3.6 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 3 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0]$, $0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}}$, $y = a\left(x - \sqrt{\frac{h}{-a}}\right)^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi x^2 dy = \frac{\pi}{-a} \int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 5.69 м

Задание 6. Вариант 6.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 2.7 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 3 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0]$, $0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}}$, $y = a\left(x - \sqrt{\frac{h}{-a}}\right)^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi x^2 dy = \frac{\pi}{-a} \int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 4.93 м

Задание 6. Вариант 7.

Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 2.2 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 3 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0],\ 0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}},\ y = a\left(x - \sqrt{\frac{h}{-a}}\right)^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi x^2 dy = \frac{\pi}{-a}\int_{-h}^{0}(\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 4.45 м

Задание 6. Вариант 8.

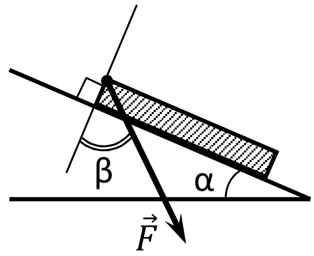
Горизонтальный водоносный слой однородной породы известной толщины пройден вертикальной скважиной, в нижней точке которой работает насос для откачки воды. В результате работы насоса в указанном слое водоносной породы образуется депрессионная воронка, которая в каждый момент времени имеет форму тела вращения с вертикальной осью, образующая которого - парабола, которая касается верхней границы водоносного слоя и проходит через точку расположения насоса. На каком расстоянии от верхней точки скважины находится граница воронки в верхней части водоносного слоя через 3.4 часа после начала работы насоса, если через один час она находилась на расстоянии 3 м? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Рассмотрим правую часть вертикального сечения воронки, уравнение образующей которой есть $y = a(x - x_0)^2, x \in [0, x_0],\ 0 < x_0 -$ точка касания параболы на верхней границе водоносного слоя, расстояние от скважины до точки касания равно x_0, параметр a отрицателен. Пусть h – толщина водоносного слоя, тогда $x_0 = \sqrt{\frac{h}{-a}},\ y = a\left(x - \sqrt{\frac{h}{-a}}\right)^2$. Отсюда на заданной глубине $y \in [-h, 0]$ расстояние от скважины до указанной параболы равно $x = x_0 - \sqrt{\frac{-y}{-a}} = \sqrt{\frac{h}{-a}} - \sqrt{\frac{-y}{-a}}$. При заданном значении параметра a объем воронки как тела вращения равно $\int_{-h}^{0} \pi x^2 dy = \frac{\pi}{-a} \int_{-h}^{0} (\sqrt{h} - \sqrt{-y})^2 dy = \frac{\pi h^2}{-6a}$. Следовательно, при увеличении объема выкачанной воды в k раз значение параметра уменьшится в k раз. Тогда величина x_0 увеличится в $\sqrt{k}$ раз. Отсюда получаем

Ответ: 5.53 м

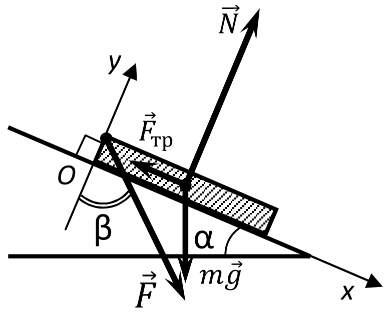
Задание 7.1.

На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом β к нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}63$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\text{tg}\beta_{max}$, округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{array}{l} Ox\colon\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{array}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

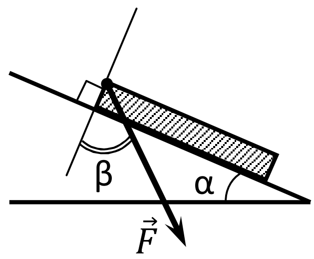
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\text{tg}\,\beta \le \mu$. Отсюда $\text{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}63$.

Ответ: $\text{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}63$.

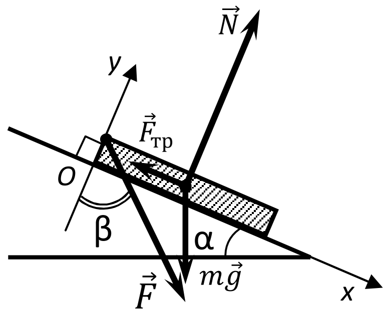
Задание 7.2.

На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}71$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\mathrm{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{aligned} Ox&:\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ Oy&:\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \leq \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \leq \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \leq\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

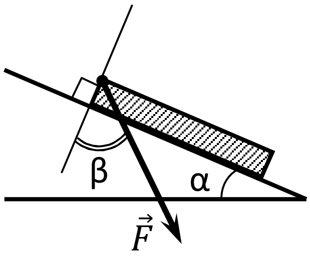
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \leq 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\mathrm{tg}\,\beta \leq \mu$. Отсюда $\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}71$.

Ответ:$\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}71$.

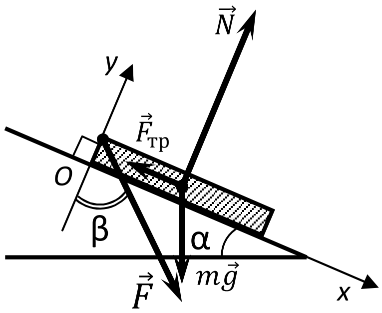
Задание 7.3.

На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}76$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\mathrm{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{mp}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{aligned} &Ox\colon\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{mp} = 0 \\ &Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{mp} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{mp} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

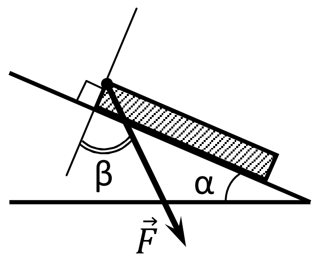
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\mathrm{tg}\,\beta \le \mu$. Отсюда $\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}76$.

Ответ:$\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}76$.

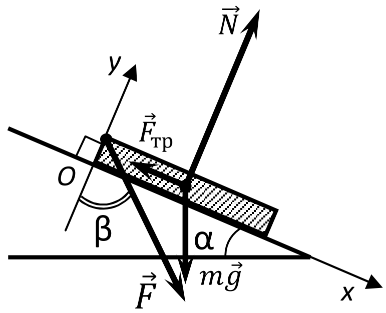
Задание 7.4.

На наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}82$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\text{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{array}{l} Ox\colon\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ Oy\colon\ \ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{array}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

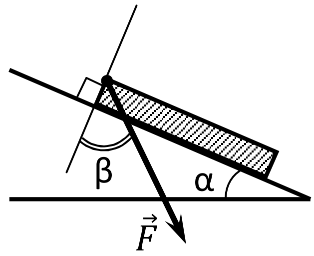
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\text{tg}\,\beta \le \mu$. Отсюда $\text{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}82$.

Ответ:$\text{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}82$.

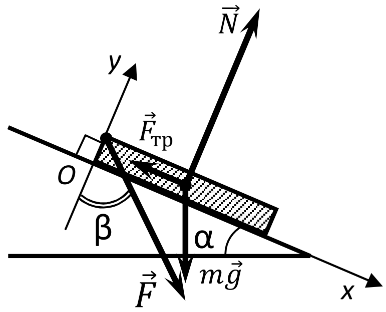
Задание 7.5.

На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом(tgα = 0,3), находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}36$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\mathrm{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{aligned} Ox&:\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ Oy&:\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

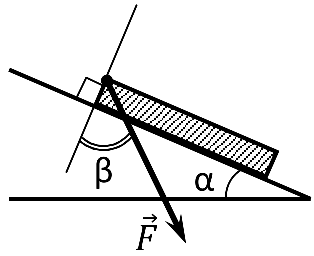
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\mathrm{tg}\,\beta \le \mu$. Отсюда $\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}36$.

Ответ:$\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}36$.

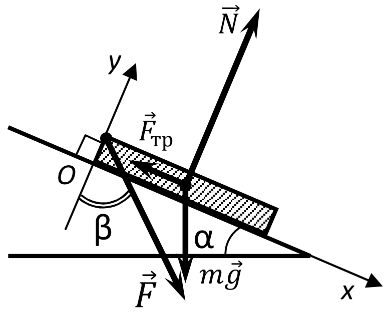
Задание 7.6.

На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом ($\text{tg}\alpha = 0{,}3$), находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}42$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\text{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{aligned} &Ox\colon\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ &Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

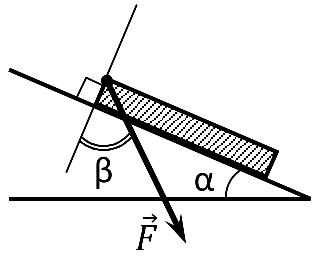
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\text{tg}\,\beta \le \mu$. Отсюда $\text{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}42$.

Ответ:$\text{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}42$.

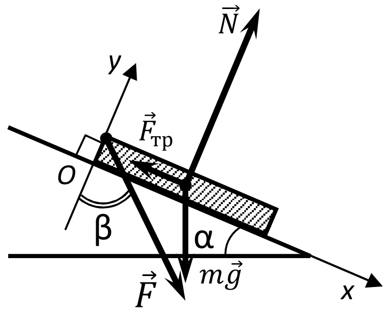
Задание 7.7.

На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом ($\operatorname{tg}\alpha = 0{,}3$), находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}47$. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\operatorname{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{array}{l} Ox\colon\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{array}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

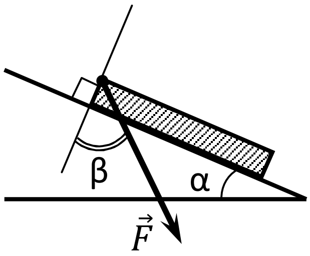
$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\operatorname{tg}\beta \le \mu$. Отсюда $\operatorname{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}47$.

Ответ:$\operatorname{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}47$.

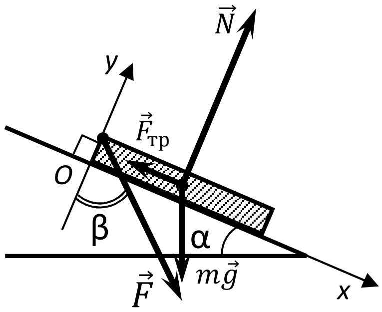
Задание 7.8.

На наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (tgα = 0,3), находится длинный брусок, к верхнему ребру которого приложена сила $\vec{F}$, направленная под углом βк нормали к наклонной плоскости (см. рисунок). Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость μ = 0,55. Найдите максимальное значение угла β, при котором брусок не сдвинется с места под действием силы $\vec{F}$ независимо от её модуля. В ответ запишите значение $\mathrm{tg}\beta_{max}$,округлив до сотых.



Решение.

Помимо силы $\vec{F}$, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси инерциальной системы отсчёта, связанной с Землёй:

$$\left.\begin{aligned} &Ox\colon\ mg\sin\alpha + F\sin\beta - F_{тр} = 0 \\ &Oy\colon\ N - mg\cos\alpha - F\cos\beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha + F\cos\beta\,, \\ F_{тр} = mg\sin\alpha + F\sin\beta\,. \end{cases}$$

В случае сухого трения покоя

$$F_{тр} \le \mu N,$$

что приводит к неравенству

$$mg\sin\alpha + F\sin\beta \le \mu(mg\cos\alpha + F\cos\beta).$$

Перепишем это неравенство в виде

$$F(\sin\beta - \mu\cos\beta) \le\ mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Правая часть этого неравенства положительна, так как

$$\mu = 0{,}63 > \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58.$$

Поэтому, чтобы неравенство выполнялось при любых F, достаточно, чтобы

$$\sin\beta - \mu\cos\beta \le 0,$$

что достигается на интервале $0 < \beta < \pi/2$ при $\mathrm{tg}\,\beta \le \mu$. Отсюда $\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}55$.

Ответ: $\mathrm{tg}\beta_{max} = \mu = 0{,}55$.

Задание 8. Вариант 1.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \leq 3, SB \geq 6.75, SC \geq 10, AB = 5, BC \leq 8, AC \leq 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB$ ≥0.9227. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB$ ≤18.45. Это значение достигается при CB=8,SA=3,SB=6.75. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} < 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 18.45.

Задание 8. Вариант 2.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \leq 3, SB \geq 7, SC \geq 10, AB = 5\frac{1}{2}, BC \leq 8, AC \leq 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2c} < 0$, откуда $sinSAB$ ≥0.955. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \leq 21.02$. Это значение достигается при CB=8,SA=3,SB=7. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} < 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 21.02.

Задание 8. Вариант 3.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \leq 3, SB \geq 7.5, SC \geq 10, AB = 5, BC \leq 8, AC \leq 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-1}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB \geq 0.67$. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \leq 13.4$. Это значение достигается при CB=8,SA=3,SB=7.5. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} < 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 13.4.

Задание 8. Вариант 4.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \leq 3, SB \geq 7.5, SC \geq 10, AB = 6, BC \leq 8, AC \leq 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-1}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB \geq 0.95$. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \leq 22.8$. Это значение достигается при CB=8,SA=3,SB=7.5. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 22.8

Задание 8. Вариант 5.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \leq 3, SB \geq 7, SC \geq 10, AB = 6, BC \leq 8, AC \leq 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB \geq 0.994$. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \leq 23.85$. Это значение достигается при CB=8,SA=3,SB=7. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 23.85

Задание 8. Вариант 6.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \leq 2.75, SB \geq 7, SC \geq 10, AB = 6, BC \leq 8, AC \leq 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB \geq 0.986$. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \leq 21.70$. Это значение достигается при CB=8,SA=2.75,SB=7. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 21.70

Задание 8. Вариант 7.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \le 2.75, SB \ge 7, SC \ge 10, AB = 5.75, BC \le 8, AC \le 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB$ ≥0.964. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \le 20.33$. Это значение достигается при CB=8,SA=2.75,SB=7. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 20.33

Задание 8. Вариант 8.

При исследовании изменений геологических структур рассматривается кристалл, форма которого представляет собой треугольную пирамиду SABC, длины ребер которой, выраженные в некоторых условных единицах, удовлетворяют условиям $SA \le 2.75, SB \ge 8, SC \ge 10, AB = 5.75, BC \le 8, AC \le 10$. Чему равно максимально возможное значение объема этого кристалла? Ответ дайте с точностью до 10^{-2}.

Решение. Обозначим $SA = x, SB = y, SC = z, BC = a, AC = b, AB = c$. Тогда $cosSAB = \frac{c^2+x^2-y^2}{2cx} < 0$, откуда $sinSAB$ ≥0.67. Максимально возможный объем кристалла соответствует случаю, когда ребро CB является высотой, опущенной на основание SAB. В таком случае объем кристалла равен $\frac{1}{3}S_{ABS} \cdot CB \le 14.20$. Это значение достигается при CB=8,SA=2.75,SB=8. Поскольку CB ортогональна плоскости SAB, то $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 10, SC = \sqrt{BC^2 + SB^2} > 10$, что соответствует условиям задачи.

Ответ: 14.20

Задание 9. Вариант 1.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре T_0= 0 °С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём$\tau_1 = 10^5 м^3$природного горючего газа при давлении$p_1 = 3 \cdot 10^6\ Па$, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$при давлении $p_2 = 6 \cdot 10^5\ Па$.Какой объём газа τнужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0\tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0\tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объёмV_1 и V_2 и температураT_1иT_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\frac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \textit{откуда} \ \ p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\frac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\frac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \ \ и \ \ p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0\tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение дляτ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}} = \frac{3 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^5}{\frac{3 \cdot 10^6}{10^5} + \frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 73 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 2.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 0\ ^\circ$С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 2{,}5 \cdot 10^6$ *Па*, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$при давлении $p_2 = 6 \cdot 10^5$ *Па*. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0\tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0\tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объёмV_1 и V_2 и температураT_1иT_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\dfrac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\dfrac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \ откуда \ \ p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\dfrac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\dfrac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \ \ и \ \ p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0\tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение дляτ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^5}{\dfrac{2{,}5 \cdot 10^6}{10^5} + \dfrac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 68 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 3.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре T_0= 0 °С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^6\ Па$, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$при давлении $p_2 = 6 \cdot 10^5\ Па$. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0 \tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0 \tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объёмV_1 и V_2 и температураT_1иT_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\frac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \ \textit{откуда} \ \ p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\frac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\frac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \ \ \textit{и} \ \ p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0 \tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение дляτ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}} = \frac{2 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^5}{\frac{2 \cdot 10^6}{10^5} + \frac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 61 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 4.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 0\ ^\circ$С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^6\ Па$, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$ при давлении $p_2 = 6 \cdot 10^5\ Па$. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0 \tau_1}{R T_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0 \tau_2}{R T_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объём V_1 и V_2 и температура T_1 и T_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\dfrac{(\nu_1 - \Delta\nu) R T_1}{V_1}}{\dfrac{\nu_1 R T_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \ откуда \ \ p = p_1 \left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\dfrac{(\nu_2 + \Delta\nu) R T_2}{V_2}}{\dfrac{\nu_2 R T_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \ \ и \ \ p = p_2 \left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0 \tau}{R T_0}.$$

Отсюда и из пункта 1 следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение для τ:

$$p_1 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2 \left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6 - 6 \cdot 10^5}{\dfrac{1{,}5 \cdot 10^6}{10^5} + \dfrac{6 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 50 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 5.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре T_0= 0 °С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^6\ Па$, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$при давлении $p_2 = 8 \cdot 10^5\ Па$. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0\tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0\tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объёмV_1 и V_2 и температураT_1иT_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\frac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \quad \textit{откуда} \quad p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\frac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\frac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \quad \textit{и} \quad p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0\tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение дляτ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}} = \frac{3 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5}{\frac{3 \cdot 10^6}{10^5} + \frac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 65 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 6.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 0\ ^\circ$C.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 2{,}5 \cdot 10^6\ Па$, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$при давлении $p_2 = 8 \cdot 10^5\ Па$. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0\tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0\tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объёмV_1 и V_2 и температураT_1иT_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\dfrac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\dfrac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \ откуда\ \ p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\dfrac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\dfrac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2}\ \ и\ \ p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0\tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение дляτ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5}{\dfrac{2{,}5 \cdot 10^6}{10^5} + \dfrac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 59 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 7.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $T_0 = 0$ °С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^6$ *Па*, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$ при давлении $p_2 = 7 \cdot 10^5$ *Па*. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0\tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0\tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объём V_1 и V_2 и температура T_1 и T_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\frac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \textit{откуда} \ \ p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\frac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\frac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \ \ \textit{и} \ \ p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0\tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение дляτ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\frac{p_1}{\tau_1} + \frac{p_2}{\tau_2}} = \frac{2 \cdot 10^6 - 7 \cdot 10^5}{\frac{2 \cdot 10^6}{10^5} + \frac{7 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 55 \cdot 10^3 м^3.$$

Задание 9. Вариант 8.

В качестве подземных хранилищ природного горючего газа нередко используются выработанные месторождения природных горючих газов, добыча газа на которых завершена. Разведанные запасы газа на месторождении и запасённое количество газа в хранилищах измеряются объёмом τ, который занимал бы газ при нормальных условиях, т.е. при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре T_0= 0 °С.

В одном из двух подземных хранилищ находится объём $\tau_1 = 10^5 м^3$ природного горючего газа при давлении $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^6\ Па$, в другом – объём $\tau_2 = 2 \cdot 10^5 м^3$при давлении $p_2 = 8 \cdot 10^5\ Па$. Какой объём газа τ нужно перекачать из первого хранилища газа во второе, чтобы давления газа в хранилищах стали равными? Газы в первом и во втором подземном хранилищах расположены на различных глубинах и находятся при различных температурах. Ответ в тысячах м^3 округлите до целых.

Решение.

1. Используя уравнение Клапейрона–Менделеева, найдём первоначальное количество вещества природного газа в каждом из хранилищ:

$$\nu_1 = \frac{p_0\tau_1}{RT_0}, \qquad \nu_2 = \frac{p_0\tau_2}{RT_0}.$$

2. Поскольку при перекачке газа его объёмV_1 и V_2 и температураT_1иT_2 в каждом из хранилищ остаются неизменными, то давление газа в каждом хранилище меняется и становится равным p только за счёт изменения его количества вещества:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\dfrac{(\nu_1 - \Delta\nu)RT_1}{V_1}}{\dfrac{\nu_1 RT_1}{V_1}} = \frac{\nu_1 - \Delta\nu}{\nu_1}, \ \textit{откуда} \ \ p = p_1\left(1 - \frac{\Delta\nu}{\nu_1}\right),$$

где Δν – количество вещества перекачанного газа. Аналогично

$$\frac{p}{p_2} = \frac{\dfrac{(\nu_2 + \Delta\nu)RT_2}{V_2}}{\dfrac{\nu_2 RT_2}{V_2}} = \frac{\nu_2 + \Delta\nu}{\nu_2} \ \ \textit{и} \ \ p = p_2\left(1 + \frac{\Delta\nu}{\nu_2}\right).$$

3. Свяжем количество вещества перекачанного газа Δν с его объёмом при нормальных условиях τ:

$$\Delta\nu = \frac{p_0\tau}{RT_0}.$$

Отсюдаи из пункта 1следует, что

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_1} = \frac{\tau}{\tau_1}, \qquad \frac{\Delta\nu}{\nu_2} = \frac{\tau}{\tau_2}.$$

Тогда из равенства давлений в хранилищах после перекачки получаем линейное уравнение для τ:

$$p_1\left(1 - \frac{\tau}{\tau_1}\right) = p_2\left(1 + \frac{\tau}{\tau_2}\right)$$

с решением

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}}.$$

Ответ:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{\dfrac{p_1}{\tau_1} + \dfrac{p_2}{\tau_2}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5}{\dfrac{1{,}5 \cdot 10^6}{10^5} + \dfrac{8 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5}} \approx 37 \cdot 10^3 м^3.$$