2021 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

с решениями и ответами

Задание 1. (20 баллов)
В трещиноватой породе, содержащей нефть, на глубине x угол наклона мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|\frac{x}{3}-a|$, при этом угол наклон крупных трещин равен $\arccos|x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в некоторых единицах длины). При каком минимальном значении параметра b максимальное значение параметра a, при котором указанные углы наклона совпадают, не менее 4?

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|\frac{x}{3}-a|=\arccos|x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |\frac{x}{3}-a|=\sqrt{1-(x-b)^2}, \\ |\frac{x}{3}-a|\le 1, \\ |x-b|\le 1 \end{cases}$$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(x-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{x}{3}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{x}{3}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{3}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{x}{3}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{3}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения величины 3a, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{10}$ и $b-\sqrt{10}$ соответственно.
Максимальное значение a при этом равно $\frac{b+\sqrt{10}}{3}$. Отсюда следует

Ответ: 12- $\sqrt{10}$

Задание 2. (15 баллов)

Поверхность некоей экзопланеты покрыта многокилометровым слоем воды. Период обращения планеты вокруг своей оси $T = 6\,ч$, радиус планеты $R = 16000\,км$. Каково атмосферное давление p_0 над поверхностью океана на экваторе планеты, если под поверхностью на глубине $h = 1600\,м$ давление в воде $p = 125 \cdot 10^5\,Па$? Считать, что на экваторе на поверхности океана на тело массой $m_0 = 1\,кг$ по закону всемирного тяготения действует сила величиной $F_0 = 8{,}92\,Н$. Принять плотность воды постоянной и равной $\rho = 1000\,кг/м^3$. Океаническими течениями и иным движением воды в океане пренебречь.

Решение.

Выделим в океане на широте экватора столб жидкости в виде прямого цилиндра, одно из оснований которого площадью S находится на поверхности океана, а второе – на глубине h (см. рисунок 1). Из условия задачи следует, что $h \ll R_З$. Поэтому в пределах выделенного объёма считаем вызванное гравитационным притяжением к Земле ускорение $\vec{g} = \vec{F}_0/m_0$ постоянным вектором, а сам выделенный объём – материальной точкой. Рассмотрим движение этого тела в геоцентрической системе отсчёта с началом O в центре Земли, ось Oz которой направлена по оси вращения Земли, а две другие оси направлены на неподвижные звёзды. В этой системе отсчёта Земля совершает вращение с постоянной угловой скоростью относительно оси Oz, а выделенный объём равномерно движется по окружности с радиусом, равным радиусу Земли $R_З$. Данную систему отсчёта будем считать инерциальной, поэтому при решении задачи используем второй закон Ньютона.

На выделенный столб жидкости действуют: сила гравитационного притяжения к Земле $m\vec{g}$, направленная к центру Земли, сила давления воздуха на левое основание цилиндра $\vec{F}_1$ и сила давления окружающей жидкости на боковую поверхность и правое основание цилиндра $\vec{F}_2$ (см. рисунок 2). Поэтому можно записать второй закон Ньютона в виде:

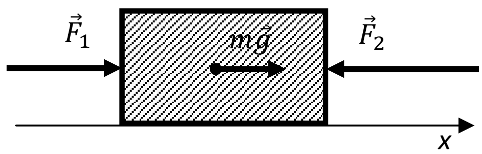


Рис. 2

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

где m – масса выделенного элемента жидкости, а ускорение $\vec{a}$ при равномерном движении по окружности направлено к центру окружности и по величине равно $v^2/R_З$.

Сила давления воздуха $\vec{F}_1$ и сила давления жидкости $\vec{F}_2$ равны по величине соответственно p_0S и pS и перпендикулярны основаниям цилиндра. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось x, проходящую через текущее положение цилиндра и центр окружности, по которой он движется:

$$m\frac{v^2}{R_З} = mg + p_0S - pS.$$

С учётом того, что линейная скорость движения цилиндра по окружности $v = 2\pi R_З/T$, масса выделенного объёма $m = \rho hS$, а $g = F_0/m_0$, из второго закона Ньютона получаем:

$$p = p_0 + \rho h\left(\frac{F_0}{m_0} - \frac{4\pi^2 R_З}{T^2}\right).$$

Отсюда имеем:

$$p_0 = p - \rho h\left(\frac{F_0}{m_0} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}\right) = 125\cdot 10^5 - 1000\cdot 1600\cdot\left(8{,}92 - \frac{4\pi^2\cdot 16\cdot 10^6}{21600^2}\right) \approx\approx 3{,}9\cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Ответ: $3{,}9\cdot 10^5$ *Па*.

Задание 3. (20 баллов)

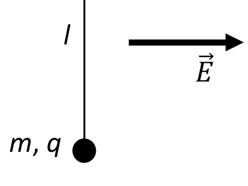
Исследуемая первоначально горизонтальная твердая плоская плита прямоугольной формы смещается под воздействием внешних сил в процессе оползней. Форма плиты представляет собой прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 200,\ \text{BC} = 300$ метров. Известно, что точки B и C поднялись на 15 и 5 м соответственно, точка A осталась на прежнем уровне. На какой угол наклонилась плита относительно горизонтальной плоскости?

Решение. Рассмотрим горизонтальную плоскость, проходящую через точку A, проекции точек B, C соответственно на эту плоскость обозначим как B_1, C_1 соответственно. Далее пусть $BB_1 = h_B, CC_1 = h_C$, точка O – пересечение горизонтальной плоскости и прямой BC. Из подобия треугольников BOB_1 и COC_1получим $\frac{OC}{BO} = \frac{h_C}{h_B} <=> OC = a\frac{h_C}{h_B - h_C},\ OB = a\frac{h_B}{h_B - h_C}$, где $a = BC,\ c = AB$. Из прямоугольного треугольника ABO по теореме Пифагора получаем $A\text{O} = \sqrt{c^2 + a^2\left(\frac{h_B}{h_B - h_C}\right)^2}$, тогда высота $h = BH$ треугольника ABO, опущенная на гипотенузу AO, определяется из равенства $AO\cdot h = BA\cdot BO <=> h = \frac{cah_B}{\sqrt{c^2(h_B - h_C)^2 + a^2h_B^2}}$, что определяет $BHB_1 -$ угол наклона плоскости плиты к горизонтальной плоскости: $sinBHB_1 = \frac{h_B}{h} = \frac{\sqrt{c^2(h_B - h_C)^2 + a^2h_B^2}}{ca} = sin\beta\sqrt{1 + (\frac{c}{a})^2(1 - \frac{h_C}{h_B})^2}$. Здесь $sin\beta = \frac{h_B}{c}$. Подставив значения условия задачи, получим искомый $sinBHB_1 = \frac{3}{40}\sqrt{1 + \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{97}}{120}$.

Ответ: $arcsin\frac{\sqrt{97}}{120}$

Задание 4. (15 баллов)

Маленький незаряженный шарик массой m висит на невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной $l = 60$ *см* в однородном горизонтальном электрическом поле $\vec{E}$ (см. рисунок). Модуль напряжённости поля $E = 6\cdot 10^5$ *В/м*. В начальный момент времени шарику сообщили заряд $q = 5$ *нКл* и горизонтальную скорость определённой величины и определённого направления, в результате чего шарик начал равномерно двигаться по окружности радиусом $r = 36$ *см*. Найдите массу шарика.



Считать ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение.

На шарик при его движении действуют сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила со стороны электрического поля $\vec{F}_{эл} = q\vec{E}$, сонаправленная вектору $\vec{E}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная вдоль нити.

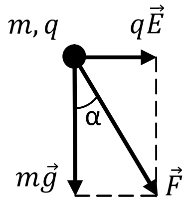


Рис. 1

Обозначим $\vec{F} = m\vec{g} + q\vec{E}$. Сила $\vec{F}$ – постоянный вектор. Кроме того, из рисунка 1 следует, что направление силы $\vec{F}$ составляет угол α с вертикалью, определяемый условием

$$\operatorname{tg}\alpha = qE/(mg),$$

а модуль этой силы $F = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$.

При равномерном движении шарика по окружности его кинетическая энергия сохраняется. На основании теоремы о кинетической энергии отсюда следует, что работа сил, под действием которых движется шарик, при движении шарика равна нулю. Данная работа складывается из работы силы натяжения нити $\vec{T}$ и работы силы $\vec{F}$. При условии, что нить натянута, шарик движется по поверхности сферы с радиусом, равным длине нити l, а сила натяжения $\vec{T}$ направлена, как и нить, по радиусу сферы, т.е. перпендикулярна траектории движения шарика. Следовательно, работа силы $\vec{T}$ равна нулю. Значит, работа постоянной силы $\vec{F}$ тоже равна нулю на любом перемещении шарика по окружности. Это означает, что в любой момент времени сила $\vec{F}$ перпендикулярна к касательной к окружности в точке, где в этот момент находится шарик. Поскольку касательные к окружности лежат в её плоскости, то, выбрав две не параллельных друг другу касательных, получаем, что постоянная сила $\vec{F}$ перпендикулярна плоскости окружности. Иными словами, окружность, по которой движется заряд, лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{F}$, как показано на рисунке 2. Такое движение шарика возможно, если его начальная скорость перпендикулярна плоскости рисунка. Отметим, что нить при движении заряда описывает коническую поверхность. Из рисунка 2 следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}}.$$

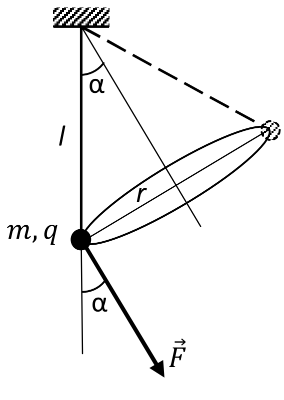


Рис. 2

Из двух выражений для tg α получаем уравнение

$$\frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} = \frac{qE}{mg}$$

с решением

$$m = \frac{Eq\sqrt{l^2 - r^2}}{gr} = \frac{6 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{(0{,}6)^2 - (0{,}36)^2}}{10 \cdot 0{,}36} = 4 \cdot 10^{-4} \textit{кг} = 0{,}4\ \textit{г}.$$

Ответ: 0,4 *г*.

Задание 5. (15 баллов)

Какие опасные геологические процессы развиты по берегам морей? Предложите методы борьбы с ними.

Ответ: Моря постоянно воздействуют на окружающую территорию суши. С геологическими процессами по берегам морей могут быть связаны такие опасные для человека и его хозяйственной деятельности явления:

1) Абразия (разрушение) берегов морскими волнами. Абразии способствует отсутствие пляжа (волны подходят непосредственно к обрывистому берегу) и обломки пород переносимые волнами.
2) В результате абразии происходит активизация береговых гравитационных процессов (оползней, обвалов). Эти явления могут приводить к разрушению и обрушению зданий, дорог, а в некоторых случаях к гибели людей.

Для защиты от этих опасных явлений разрабатываются комплексные меры мониторинга, защиты и укрепления берегов, строятся волноломы и т.д.

3) Цунами – высокие волны (десятки метров), порождаемые чаще всего подводными землетрясениями. Цунами, достигающие берега, вызывают сильные разрушения, затопления территории и гибель людей.

Осуществляется контроль за сейсмоактивностью, информирование населения о причинах и признаках приближающегося цунами, создаётся система оповещения. Для уменьшения воздействия цунами создают защитные гидротехнические сооружения, строятся волноломы и береговые дамбы.

Дополнительные баллы можно получить в случае описания менее опасных явлений - эоловые процессы, карстовые явления и другие.

Задание 6. (15 баллов)

Что изображено на фотографии? Как называются характерные элементы рельефа и как они образуются?

Ответ: На фотографии изображён ледник горно-долинного типа. Наблюдаются три его области: аккумуляции, стока и разгрузки.

В верхней части, в понижениях между горными пиками снег накапливается, превращается в фирн, а затем в лёд. Скопившийся в ледниковых чашах (карах, цирках) лёд устремляется в горную долину, по которой перемещается на десятки километров.
При движении льда благодаря огромному давлению горные долины постепенно приобретают корытообразную U-образную форму и называются трогом.
На поверхности ледника видны многочисленные трещины, образующиеся при изгибе и развитии напряжения. Возникающие по краям ледника трещины, вызванные его течением, называются гривасы.
При своем движении ледник захватывает и переносит различный материал, начиная от тонкого песка и кончая крупными глыбами. Они вытягиваются вдоль тела ледника, располагаясь в различных его частях – эти скопления обломков, включенные и переносимые льдом, называются мореной.
Область разгрузки представляет собой окончание ледника, в данном случае она представлена озером.

<u>Критерии оценки решений</u>

Критерии оценки	**Баллы**					
	Задание 1	**Задание 2**	**Задание 3**	**Задание 4**	**Задание 5**	**Задание 6**
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа (для заданий 1-4); в работе дан исчерпывающий ответ на поставленное геологическое задание (для заданий 5 и 6)	20	15	20	15	15	15
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен; - недостаточно полное обоснование ответов на геологические задания.	10	10	10	10	10	10
Задание выполнено с существенными недочетами: - решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях; - ответы на геологические задания даны крайне поверхностно и неполно.	5	5	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие выполненного задания в работе.	0	0	0	0	0	0

При правильном решении, но небрежном оформлении решений задания 1 или задания 3 жюри вправе снизить оценку на 5 баллов.