ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2016-2017 учебный год

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 2 раза меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения а, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 671 м

Ответ: 671

Вариант 1.2

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине *x* наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где *a,b* – параметры глубины (величины *x,a,b* измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение *a*, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 3 раза меньше максимального значения *a*, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра *b*? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения а, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как
$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 447 м

Ответ: 447

Вариант 1.3

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение *a*, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 4 раза меньше максимального значения *a*, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра *b*? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$$\left|\frac{y}{2}-a\right|=\sqrt{1-(y-b)^2}, \left|\frac{y}{2}-a\right|\le 1, |y-b|\le 1.$$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=\left|\frac{y}{2}-a\right|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5})\Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 372 м

Ответ: 372

Вариант 1.4

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 5 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения а, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases}|x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2},\\ |x-a|\le 1,\\ |2x-b|\le 1\end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2},|\frac{y}{2}-a|\le 1,|y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 335 м

Ответ: 335

Вариант 1.5

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где *a,b* – параметры глубины (величины *x,a,b* измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение *a*, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 6 раз меньше максимального значения *a*, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра *b*? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как
$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5})\Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 313 м

Ответ: 313

Вариант 1.6

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине *x* наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где *a,b* – параметры глубины (величины *x,a,b* измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение *a*, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 7 раз меньше максимального значения *a*, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра *b*? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения а, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 298 м

Ответ: 298

Вариант 1.7

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 8 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра a, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 287 м

Ответ: 287

Вариант 1.8

Результаты исследований трещин породы газоносного месторождения показывают, что на глубине x наклон мелких трещин по отношению к вертикали равен $\arcsin|x-a|$, при этом наклон крупных трещин равен $\arccos|2x-b|$, где a,b – параметры глубины (величины x,a,b измеряются в сотнях метров). Известно, что минимальное значение a, при котором углы наклона мелких и крупных трещин совпадают, в 9 раз меньше максимального значения a, обладающего этим свойством. Чему равно значение параметра b? Ответ дайте с точностью до 1 метра.

Решение. Задача сводится к нахождению максимально (минимально) возможного значения a, при котором существует решение уравнения $\arcsin|x-a|=\arccos|2x-b|$ при заданном значении b. Определяя область допустимых значений и беря синус от обеих частей, последнее уравнение представим в виде эквивалентной системы

$$\begin{cases} |x-a|=\sqrt{1-(2x-b)^2}, \\ |x-a|\le 1, \\ |2x-b|\le 1 \end{cases}$$

Относительно переменной y=2x эти три условия выглядят как

$|\frac{y}{2}-a|=\sqrt{1-(y-b)^2}, |\frac{y}{2}-a|\le 1, |y-b|\le 1.$

Множество решений системы соответствует точкам плоскости *(y,z)*, для которых точки полуокружности $z=\sqrt{1-(y-b)^2}$ имеют общие точки с ломаной $z=|\frac{y}{2}-a|$. При фиксированном значении b максимально (минимально) возможное a соответствует касанию левой (правой) части ломаной этой полуокружности. Точка (b,0) является центром полуокружности, радиус полуокружности равен 1, угол наклона прямой $z=a-\frac{y}{2}$, соответствующей левой части ломаной, равен $\pi-arctg\frac{1}{2}$, угол наклона прямой $z=-a+\frac{y}{2}$, соответствующей правой части ломаной, равен $arctg\frac{1}{2}$. Следовательно, максимальное и минимальное значения параметра *a*, при которых ломаная и полуокружность имеют общие точки, равны $b+\sqrt{5}$ и $b-\sqrt{5}$ соответственно. Условие задачи означает, что первое полученное

значение в k раз превышает второе. Это означает $b+\sqrt{5}=k(b-\sqrt{5}) \Leftrightarrow b=\frac{k+1}{k-1}\sqrt{5}$, что соответствует 280 м

Ответ: 280

Задание 2

Вариант 2.1

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^\circ$C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 5$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^\circ$C равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha N kT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N kT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M} \right] kT .$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 - p_н}{(1-\alpha) p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}05 \cdot 10^5 + 0{,}95 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}95 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}05 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 4{,}2$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 4{,}2$

Вариант 2.2

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ ^oC, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 4$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ ^oC равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha N kT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N kT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна M/N_A, где N_A – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_A}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_A}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{н}\left(V-V_1\right)=\left[\frac{p_1 V}{kT}+\left(1-\alpha\right)N-\frac{\rho V_1 N_{A}}{M}\right]kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_{A}k=R=8{,}31\frac{Дж}{моль\cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1=V\frac{\alpha p_1+\left(1-\alpha\right)p_2-p_{н}}{\left(1-\alpha\right)p_2-p_{н}+\alpha\frac{\rho RT}{M}}=10\cdot\frac{0{,}04\cdot10^5+0{,}96\cdot2\cdot10^6-9\cdot10^5}{0{,}96\cdot2\cdot10^6-9\cdot10^5+0{,}04\cdot\frac{510\cdot8{,}31\cdot288}{44\cdot10^{-3}}}\approx4{,}8$$

м^3.

Ответ: $V_1\approx4{,}8$

Вариант 2.3

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ ^{o}С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 3$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ ^{o}С равно $p_{н} = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0=\frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно *N*, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $\left(1-\alpha\right)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_{н}$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана}=\alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V-V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V-V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_{\text{н}} + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}.$$
(1)

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_{\text{н}})(V - V_1)}{\alpha kT}.$$
(2)

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_{\text{А}}$, где $N_{\text{А}}$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_{\text{А}}}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_{\text{А}}}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{\text{н}}(V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_{\text{А}}}{M}\right] kT.$$
(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_{\text{А}} k = R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 - p_{\text{н}}}{(1-\alpha) p_2 - p_{\text{н}} + \alpha \frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 10^5 + 0{,}97 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}97 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}03 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 5{,}6$$
м^3.

Ответ: $V_1 \approx 5{,}6$

Вариант 2.4

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15\ ^{\circ}$С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 2$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 2$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15\ ^{\circ}$С равно $p_{\text{н}} = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно *N*, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул *N* в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right] kT. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 - p_н}{(1-\alpha) p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}02 \cdot 10^5 + 0{,}98 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}98 \cdot 2 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}02 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 6{,}6$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 6{,}6$

Вариант 2.5

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^\circ$C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 5$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^\circ$C равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha N k T}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N k T}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha k T}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{\text{н}}(V-V_1)=\left[\frac{p_1V}{kT}+(1-\alpha)N-\frac{\rho V_1 N_{\text{А}}}{M}\right]kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_{\text{А}}k=R=8{,}31\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1=V\frac{\alpha p_1+(1-\alpha)p_2-p_{\text{н}}}{(1-\alpha)p_2-p_{\text{н}}+\alpha\frac{\rho RT}{M}}=10\cdot\frac{0{,}05\cdot10^5+0{,}95\cdot1{,}6\cdot10^6-9\cdot10^5}{0{,}95\cdot1{,}6\cdot10^6-9\cdot10^5+0{,}05\cdot\frac{510\cdot8{,}31\cdot288}{44\cdot10^{-3}}}\approx3{,}1$$

м^3.

Ответ: $V_1\approx3{,}1$

Вариант 2.6

В ёмкость объёмом V = 10 м^3, содержащую газообразный пропан при давлении p_1 = 0,1 МПа и температуре t = 15 °C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет α = 4 %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения p_2 = 1,6 МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при t = 15 °C равно $p_{\text{н}}$ = 0,9 МПа? Плотность жидкого пропана ρ = 510 кг/м^3, молярная масса пропана M = 44 г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0=\frac{p_1V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно *N*, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_{\text{н}}$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}}=\alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V-V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V-V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha N k T}{V - V_1}.$$

(1)

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha k T}.$$

(2)

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right] kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 - p_н}{(1-\alpha)p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho R T}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}04 \cdot 10^5 + 0{,}96 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}96 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}04 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 3{,}7$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 3{,}7$

Вариант 2.7

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15\ ^\circ$C, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 3$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15\ ^\circ$C равно $p_н = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \frac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно *N*, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_н$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{метана} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\frac{\alpha NkT}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_н + \frac{\alpha NkT}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул *N* в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_н)(V - V_1)}{\alpha kT}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна $M/N_А$, где $N_А$ – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\frac{\rho V_1 N_А}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_н (V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_А}{M}\right] kT. \qquad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для *N* из (2) и учитывая, что $N_А k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2 - p_н}{(1-\alpha)p_2 - p_н + \alpha \frac{\rho RT}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}03 \cdot 10^5 + 0{,}97 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}97 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}03 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 4{,}4$$

м^3.

Ответ: $V_1 \approx 4{,}4$

Вариант 2.8

В ёмкость объёмом $V = 10$ м^3, содержащую газообразный пропан при давлении $p_1 = 0{,}1$ МПа и температуре $t = 15$ $^{\circ}$С, закачали смесь пропана с метаном, в которой доля числа молекул метана в общем количестве молекул составляет $\alpha = 2$ %. В результате давление в ёмкости при той же температуре увеличилось до значения $p_2 = 1{,}6$ МПа, причём часть пропана в ней сконденсировалась и перешла в жидкое состояние. Каков объём V_1 жидкого пропана, образовавшегося в ёмкости, если давление насыщенных паров пропана при $t = 15$ $^{\circ}$С равно $p_{\text{н}} = 0{,}9$ МПа? Плотность жидкого пропана $\rho = 510$ кг/м^3, молярная масса пропана $M = 44$ г/моль. Проникновением небольшого числа молекул метана в жидкий пропан пренебречь. Ответ в м^3 округлить до десятых.

Решение. Для описания метана и газообразного пропана используем уравнение Клапейрона–Менделеева. Тогда количество молекул пропана, изначально находившегося в ёмкости, составляет $N_0 = \dfrac{p_1 V}{kT}$. Пусть общее количество молекул газа, поступившего в ёмкость, равно N, т.е. этот газ содержит αN молекул метана и $(1-\alpha)N$ молекул пропана.

После закачки газа в ёмкости находится жидкий пропан и газ, состоящий из насыщенных паров пропана при парциальном давлении $p_{\text{н}}$ и метана. Учитывая, что количество молекул метана в ёмкости равно $N_{\text{метана}} = \alpha N$ и метан в ёмкости находится только в виде газа и поэтому занимает объем $V - V_1$, получим, что парциальное давление метана в ёмкости составляет $\dfrac{\alpha N k T}{V - V_1}$. Поэтому давление в ёмкости в конечном состоянии, согласно закону Дальтона,

$$p_2 = p_{\text{н}} + \frac{\alpha N k T}{V - V_1}. \qquad (1)$$

Из уравнения (1) находим общее число молекул N в газе, закачанном в ёмкость:

$$N = \frac{(p_2 - p_{\text{н}})(V - V_1)}{\alpha k T}. \qquad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что масса жидкого пропана в ёмкости составляет ρV_1, а масса одной молекулы пропана равна M/N_{A}, где N_{A} – число Авогадро, найдём, что количество молекул сжиженного пропана равно $\dfrac{\rho V_1 N_{\text{A}}}{M}$. Следовательно, количество молекул пропана в насыщенном паре равно $\dfrac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \dfrac{\rho V_1 N_{\text{A}}}{M}$ и поэтому уравнение Клапейрона–Менделеева для насыщенного пара пропана имеет вид:

$$p_{н}(V - V_1) = \left[\frac{p_1 V}{kT} + (1-\alpha)N - \frac{\rho V_1 N_A}{M}\right]kT.$$

(3)

Подставляя в (3) выражение для N из (2) и учитывая, что $N_A k = R = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К}$ – универсальная газовая постоянная, получим:

$$V_1 = V \frac{\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2 - p_{н}}{(1-\alpha) p_2 - p_{н} + \alpha \frac{\rho R T}{M}} = 10 \cdot \frac{0{,}02 \cdot 10^5 + 0{,}98 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5}{0{,}98 \cdot 1{,}6 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^5 + 0{,}02 \cdot \frac{510 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{44 \cdot 10^{-3}}} \approx 5{,}5$$

$м^3$.

Ответ: $V_1 \approx 5{,}5$

Задание 3

Вариант 3.1

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 12 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 5.5 и 15 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x \cdot \sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot \sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x \cdot \sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x + a)\cdot a \cdot \sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \frac{d_2^2 - d_1^2}{2a \cdot \sin^2\alpha} - \frac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1 R = x + \frac{a}{2} = \frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x + \frac{a}{2})^2 \cdot \sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a \cdot \sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a \cdot \sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 10.0 мм

Ответ: 10.0

Вариант 3.2

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 14 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 6.4 и 15 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x \cdot \sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 9.8 мм

Ответ: 9.8

Вариант 3.3

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 25 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 7.4 и 25 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x \cdot \sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 15.1 мм

Ответ: 15.1

Вариант 3.4

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 50 мм, угол между ходами равен 14 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 8.5 и 16 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 11.3 мм

Ответ: 11.3

Вариант 3.5

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 16 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 9.3 и 18 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \frac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \frac{a}{2} = \frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \frac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 13.2 мм

Ответ: 13.2

Вариант 3.6

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 17 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 10.5 и 16 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2 - d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2 .$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2 - d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 12.2 мм

Ответ: 12.2

Вариант 3.7

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 16 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 11.4 и 18 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x\cdot\sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 14.0 мм

Ответ: 14.0

Вариант 3.8

Плоский кусок горной породы имеет два тонких прямых сквозных хода, которые проделали черви-илоеды в эпоху мезозоя. Один из этих ходов имеет длину 40 мм, угол между ходами равен 12 градусам, расстояния от входа и выхода первого хода до второго хода равны соответственно 12.2 и 16 мм. На каком расстоянии от второго хода располагается точка - середина первого хода? Ответ дайте с точностью до 0.1 мм

Решение. Рассмотрим две параллельные плоскости, содержащие прямые ходы условия задачи. Пусть A,B – соответственно вход и выход из породы для первой прямой, M и N – их проекции на вторую прямую. Пусть далее точка O первой прямой и ее проекция O_1 на вторую прямую взяты таким образом, что отрезок OO_1 – общий перпендикуляр к двум прямым. Проекции точек A и B на плоскость, содержащую вторую прямую, обозначим как P и Q соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников O_1MP и O_1NQ: $MP = x \cdot \sin\alpha, NQ = (x+a)\cdot\sin\alpha$, где x= O_1P, a=AB. Из прямоугольных треугольников AMP и BNQ: $d_1^2 = h^2 + (x\cdot\sin\alpha)^2, d_2^2 = h^2 + ((x+a)\cdot\sin\alpha)^2$, здесь d_1 - расстояние от точки A до второй прямой, d_2 - расстояние от точки B до второй прямой, h – расстояние между прямыми ходами, h=AP=BQ. Вычитая второе равенство из первого, получаем $(2x+a)\cdot a\cdot\sin^2\alpha = d_2^2 - d_1^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha} - \dfrac{a}{2}$. Пусть точка C – середина AB, точка R – ее проекция на прямую PQ . Тогда из теоремы Фалеса $O_1R = x + \dfrac{a}{2} = \dfrac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin^2\alpha}$, теперь искомое расстояние CK находим по теореме Пифагора из треугольника CRK, K – проекция точки C на вторую прямую, отрезок RK перпендикулярен второй прямой по теореме о трех перпендикулярах. При этом $RK = (x+a)\cdot\sin\alpha$. Таким образом, длина CK находится из равенства

$$CK^2 = h^2 + (x+\frac{a}{2})^2\cdot\sin^2\alpha = d_1^2 - (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha} - \frac{a}{2}\sin\alpha)^2 + (\frac{d_2^2-d_1^2}{2a\cdot\sin\alpha})^2.$$

Окончательно $CK = \sqrt{d_1^2 - \dfrac{a^2}{4}\sin^2\alpha + \dfrac{1}{2}(d_2^2-d_1^2)}$. Подставляя данные задачи, получаем 13.6 мм

Ответ: 13.6

Задание 4

Вариант 4.1

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 6600 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\frac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \frac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

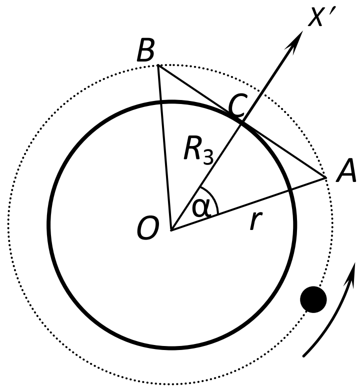
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой скоростью $\omega_0 = 2\pi/T$, что и Земля, где T – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета S спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса r с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.

На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка C на оси OX' обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат S', прямая ACB представляет собой касательную к поверхности Земли в точке C, точки A и B являются точками пересечения касательной ACB с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга AB отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки C, причём угол AOB равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке C, совпадающее с временем движения спутника по дуге AB, составляет



$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6600}\right)}{\frac{6400}{6600}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6,6}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 440\,\text{с}.$$

Ответ: 440

Вариант 4.2

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 6650 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g\cdot\left(\frac{R_З}{r}\right)^2. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

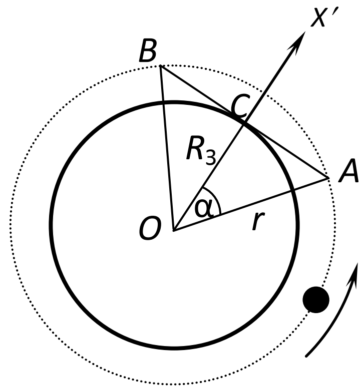
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6650}\right)}{\frac{6400}{6650}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6{,}65}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 497 \text{ с.}$$

Ответ: 497

Вариант 4.3

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса $r = 6700$ км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З = 6400$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта *S*, у которой начало координат *O* совпадает с центром Земли, ось *OZ* совпадает с осью вращения Земли, а оси *OX* и *OY* направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом *r* в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где *m* – масса спутника, *M* – масса Земли, *G* – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли *g*. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом *r* принимает вид:

$$g(r) = g\cdot\left(\frac{R_З}{r}\right)^2.$$

(1)

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса *r* с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r}.$$

(2)

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

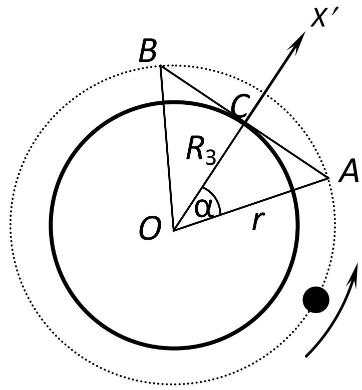
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта *S*′, неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта *S*, ось *OZ*′ совпадает с осью *OZ* системы координат *S*, а ось *OX*′ направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета *S*′ вращается относительно системы отсчета *S* вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6700}\right)}{\frac{6400}{6700}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6{,}7}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 549 \text{ с.}$$

Ответ: 549

Вариант 4.4

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 6750 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2 . \quad (1)$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} . \quad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

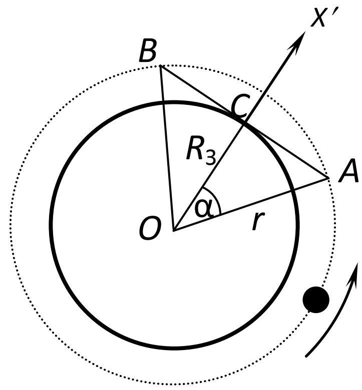
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{6750}\right)}{\frac{6400}{6750}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{6{,}75}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 598\,\text{с}.$$

Ответ: 598

Вариант 4.5

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса $r = 7000$ км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З = 6400$ км, ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта *S*, у которой начало координат *O* совпадает с центром Земли, ось *OZ* совпадает с осью вращения Земли, а оси *OX* и *OY* направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом *r* в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где *m* – масса спутника, *M* – масса Земли, *G* – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли *g*. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом *r* принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2 .$$

(1)

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса *r* с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} .$$

(2)

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

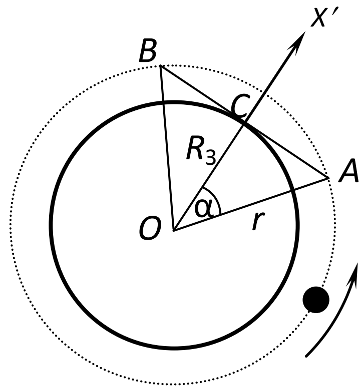
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта *S′*, неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта *S*, ось *OZ′* совпадает с осью *OZ* системы координат *S*, а ось *OX′* направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета *S′* вращается относительно системы отсчета *S* вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -Зспутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_З}{r}\right)}{\frac{R_З}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7000}\right)}{\frac{6400}{7000}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}0}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 818\,\text{с}.$$

Ответ: 818

Вариант 4.6

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7050 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта S, у которой начало координат O совпадает с центром Земли, ось OZ совпадает с осью вращения Земли, а оси OX и OY направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\frac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \frac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2 .$$

(1)

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} .$$

(2)

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

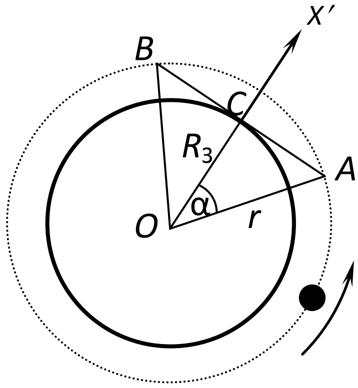
Рассмотрим теперь систему отсчёта S', неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта S, ось OZ' совпадает с осью OZ системы координат S, а ось OX' направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета S' вращается относительно системы отсчета S вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.

На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX'* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S'*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет



$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7050}\right)}{\frac{6400}{7050}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}05}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 858\,\text{с}.$$

Ответ: 858

Вариант 4.7

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7100 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли R_3 = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта *S*, у которой начало координат *O* совпадает с центром Земли, ось *OZ* совпадает с осью вращения Земли, а оси *OX* и *OY* направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом *r* в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\frac{Mm}{r^2}$, где *m* – масса спутника, *M* – масса Земли, *G* – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \frac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_3$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли *g*. Следовательно, $g = \frac{GM}{R_3^2}$, т.е. $GM = gR_3^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом *r* принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_3}{r}\right)^2 .$$

(1)

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса *r* с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} .$$

(2)

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

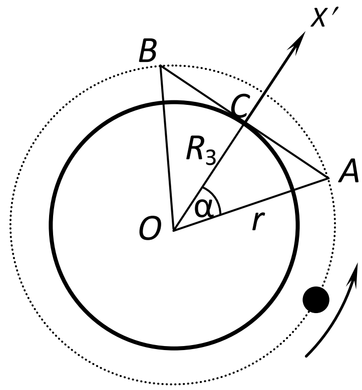
$$v = R_3\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта *S*′, неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта *S*, ось *OZ*′ совпадает с осью *OZ* системы координат *S*, а ось *OX*′ направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета *S*′ вращается относительно системы отсчета *S* вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где T – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета S спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса r с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка C на оси OX' обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат S', прямая ACB представляет собой касательную к поверхности Земли в точке C, точки A и B являются точками пересечения касательной ACB с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга AB отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки C, причём угол AOB равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке C, совпадающее с временем движения спутника по дуге AB, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7100}\right)}{\frac{6400}{7100}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}1}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 898\,\text{с}.$$

Ответ: 898

Вариант 4.8

Искусственный спутник Земли обращается с запада на восток по круговой орбите радиуса r = 7150 км, лежащей в плоскости экватора. Сколько времени за один оборот вокруг Земли спутник находится в поле зрения наблюдателя, неподвижно стоящего на экваторе? Считать, что радиус Земли $R_З$ = 6400 км, ускорение свободного падения на поверхности Земли g = 10 м/с^2. Рельефом местности и растительностью вокруг наблюдателя, а также ростом наблюдателя пренебречь. Ответ в секундах округлите до целых.

Решение. Рассмотрим движение спутника в геоцентрической системе отсчёта *S*, у которой начало координат *O* совпадает с центром Земли, ось *OZ* совпадает с осью вращения Земли, а оси *OX* и *OY* направлены к «неподвижным» звёздам. В этой системе отсчёта Земля вращается вокруг неподвижной оси. Приближённо считая данную систему отсчёта инерциальной, найдём скорость движения спутника по круговой орбите радиусом r в указанной системе координат. Спутник движется под действием силы гравитационного притяжения Земли $F = G\dfrac{Mm}{r^2}$, где m – масса спутника, M – масса Земли, G – гравитационная постоянная, и поэтому в соответствии со вторым законом Ньютона ускорение спутника $g(r) = \dfrac{GM}{r^2}$. Если положить в этой формуле $r = R_З$, то получим значение ускорения свободного падения на поверхности Земли g. Следовательно, $g = \dfrac{GM}{R_З^2}$, т.е. $GM = gR_З^2$, так что формула для величины ускорения спутника на круговой орбите радиусом r принимает вид:

$$g(r) = g \cdot \left(\frac{R_З}{r}\right)^2 . \qquad (1)$$

С другой стороны, поскольку спутник движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью, ускорение спутника сводится к центростремительному:

$$g(r) = \frac{v^2}{r} . \qquad (2)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), получим, что скорость движения спутника по орбите в геоцентрической системе отсчёта равна

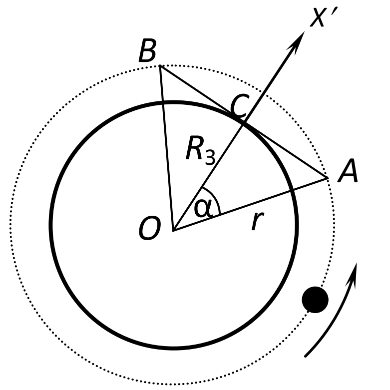
$$v = R_З\sqrt{\frac{g}{r}} .$$

Рассмотрим теперь систему отсчёта *S*′, неподвижную относительно Земли. Начало координат в этой системе отсчёта совпадает с началом координат системы отсчёта *S*, ось *OZ*′ совпадает с осью *OZ* системы координат *S*, а ось *OX*′ направлена в сторону неподвижного наблюдателя на экваторе. Ясно, что система отсчета *S*′ вращается относительно системы отсчета *S* вокруг той же оси и с той же угловой

скоростью $\omega_0 = 2\pi / T$, что и Земля, где *T* – период обращения Земли вокруг своей оси. Поэтому, поскольку в системе отсчета *S* спутник обращается -3спутник движется по окружности радиуса *r* с угловой скоростью, равной по величине

$$\omega' = \omega - \omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T},$$

так как суточное вращение Земли происходит с запада на восток.



На рисунке показано экваториальное сечение Земли. Точка *C* на оси *OX′* обозначает положение наблюдателя на экваторе Земли в системе координат *S′*, прямая *ACB* представляет собой касательную к поверхности Земли в точке *C*, точки *A* и *B* являются точками пересечения касательной *ACB* с окружностью радиусом $r = OA$, представляющей орбиту спутника. Из рисунка видно, что дуга *AB* отвечает положениям спутника на небосводе, при которых он виден из точки *C*, причём угол *AOB* равен $2\alpha = 2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)$. Следовательно, время нахождения спутника в поле зрения наблюдателя в точке *C*, совпадающее с временем движения спутника по дуге *AB*, составляет

$$t = \frac{2\alpha}{\omega'} = \frac{2\arccos\left(\frac{R_3}{r}\right)}{\frac{R_3}{r}\sqrt{\frac{g}{r}} - \frac{2\pi}{T}} = \frac{2\arccos\left(\frac{6400}{7150}\right)}{\frac{6400}{7150}\cdot 10^{-3}\cdot\sqrt{\frac{10}{7{,}15}} - \frac{2\pi}{86400}} \approx 938\,\text{с}.$$

Ответ: 938

Тестовые задания для разминки 1-го тура (10-11 классы):

Тестовые задания для разминки

Как называются легкий ветер на побережье морей, меняющий направление дважды в сутки?
Муссон
Бриз
Пассат

Как называются низкая намывная полоса суши на берегу моря, соединяющаяся одним концом с берегом?
Дельта
Атолл
Коса

Как называются низменность в низовьях реки, сложенная речными отложениями и разделенная разветвленной сетью рукавов и протоков?
Дельта
Терраса
Меандр

Как называются мелкий водоём, отделённый от моря намытым песком или коралловыми рифами?
Болото
Коса
Лагуна

Как называются прибор для измерения глубины океана на основе измерения времени получения отражённого от морского дна сигнала при его известной скорости?
Эхолот
Сейсмограф
Глубомер

Как называются наиболее крупная положительная тектоническая структура платформ, в которой на поверхность выходит ее фундамент, лишенный осадочного чехла?
Плита
Щит
Плоскогорье

Как называются концентрат тяжелых минералов, получаемый при промывке рыхлых горных пород?
Песок
Шлих
Россыпь

Как называются обломки вулканических пород и частиц вулканического стекла, поднятые в воздух при извержении вулкана?
Песок

Галька
<u>**Тефра**</u>

Как называется кусок природного металла (золота, платины) больших размеров, найденный в россыпных или коренных месторождениях?
<u>**Самородок**</u>
Слиток
Сплав

Как называются мелкие живые организмы, живущие во взвешенном состоянии в толще морской воды?
Рыбы
Кораллы
<u>**Планктон**</u>

Как называется ископаемая смола деревьев?
<u>**Янтарь**</u>
Кварцит
Торф

Как называется обширная выровненная поверхность Земли (обычно не выше 200 м над уровнем моря)?
Балка
<u>**Равнина**</u>
Пойма

Как называется совокупность неровностей поверхности земли?
Терраса
Пустыня
<u>**Рельеф**</u>

Как называется узкая V-образная долина реки?
<u>**Каньон**</u>
Овраг
Терраса

Как называется выступающая из воды постройка из морских известковых организмов?
Валун
Вулкан
<u>**Риф**</u>

Как называется естественный выход подземных вод на поверхность?
<u>**Родник**</u>

Водопад
Пруд

Как называется источник горячей воды в областях активной вулканической деятельности?
Родник
Гейзер
Горячая точка

Как называется канал, через который выбрасывается лава?
Жерло
Шахта
Колодец

Как называется процесс разрушения и химического изменения горных пород вследствие перепадов температуры, химического и механического воздействия атмосферы, воды и организмов?
Выветривание
Сальтация
Литогенез

Как называется агрегат кристаллов, наросших на общее основание?
Конгломерат
Брекчия
Друза

Как называется форма рельефа в виде понижения, узкое по сравнению со своей длиной, в основном извилистое углубление в земной поверхности?
Бархан
Долина
Плато

Как называется углубление (воронка), возникающее в результате взрыва, который происходит при ударе крупного метеорита о твердую поверхность?
Метеоритный кратер
Метеоритный желоб
Метеоритный колодец

Как называется твердое тело, имеющее естественную форму правильного многогранника, атомы которого образуют трехмерно-периодическую пространственную укладку?
Горная порода
Диапир
Кристалл

Как называется оболочка Земли между земной корой и ядром Земли?
Мантия
Литосфера

Осадочный чехол

Как называется однородное по физическим свойствам и химическому составу природное тело, образующееся в результате физико-химических процессов в глубинах или на поверхности Земли?

Резервуар

Минерал

Коралл

Как называется скопление на суше или на дне морей мелких обломков, включающих в себя зерна или кристаллы в промышленных концентрациях?

Залежь

Карст

Россыпь

Как называется рыхлые отложения, состоящие из остроугольных неокатанных обломков горных пород размером от 1 до 10 мм?

Галька

Туф

Щебень

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2016-2017 учебный год

ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Задание 1

Вариант 1.

Зависимость амплитуды *A* от времени *t* для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(2t+\frac{4}{t})-\sin(4\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{2}))-\frac{4}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=2(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{2}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 30$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: *k*=2, A_k=30. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра a находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение *a* соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$
.
$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 24.82

Вариант 2.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(4t+\frac{8}{t})-\sin(8\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{4}))-\frac{8}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=4(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{4}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 50$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=4, A_k=50. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow .$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 49.64

Вариант 3.

Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(3t+\frac{6}{t})-\sin(6\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{3}))-\frac{6}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=3(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{3}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 40$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=3, A_k=40. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 37.23

Вариант 4.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(5t+\frac{10}{t})-\sin(10\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{5}))-\frac{10}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=5(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{5}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 60$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=5, A_k=60. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow .$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 30.63

Вариант 5.

Зависимость амплитуды *A* от времени *t* для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(6t+\frac{12}{t})-\sin(12\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{6}))-\frac{12}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=6(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{6}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 70$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: *k*=6, A_k=70. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение *a* соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$

.

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 36.76

Вариант 6.

Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(12t+\frac{24}{t})-\sin(24\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{12}))-\frac{24}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=12(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{12}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 80$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=12, A_k=80. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}]\Rightarrow$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 73.52

Вариант 7.
Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(8t+\frac{16}{t})-\sin(16\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{8}))-\frac{16}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=8(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{8}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 90$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=8, A_k=90. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}] \Rightarrow$$
.
$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 49.01

Вариант 8.

Зависимость амплитуды A от времени t для первой сейсмической волны подчиняется закону $A(t)=\sin(9t+\frac{18}{t})-\sin(18\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{9}))-\frac{18}{t}$, t>0, аналогичная зависимость для второй волны имеет вид $A(t)=9(t-2\sqrt{2}\sin(t-\frac{a}{9}))$, t>0. При каком наибольшем значении $a, a\le 100$, амплитуды этих двух волн могут совпадать? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Введем обозначения для значений параметров задачи: k=9, A_k=100. Кроме того, рассмотрим обозначения $u=2\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k}), v=k(t+\frac{2}{t})$. Уравнение представим в виде $f(u)=f(v)$, где функция $f(x)=x-\sin x$. Функция $f(x)=x-\sin x$ возрастает, следовательно уравнение $f(u)=f(v)$ означает $u=v$, откуда

$\sqrt{2}k\sin(t-\frac{a}{k})=k(t+\frac{2}{t})\ge\sqrt{2}k>0 \Leftrightarrow t-\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z, t=\sqrt{2}$. Следовательно, амплитуды волн могут совпадать лишь при значении $t=\sqrt{2}$, которое доставляет минимальное значение функции $f(t)=t+\frac{2}{t}$. Соответствующие значения параметра а находятся из равенства

$\frac{a}{k}=\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$. Наибольшее значение a соответствует

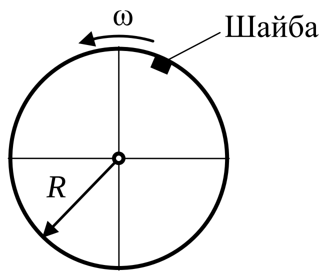
$$a=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi n)\le 80 \Rightarrow n_{\max}=[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}]\Rightarrow$$

$$a_{\max}=k(\sqrt{2}-\frac{\pi}{2}+2\pi[\frac{40}{\pi}+\frac{k}{4}-\frac{\sqrt{2}k}{2\pi}])$$

Ответ: 55.14

Задание 2

В лабораторных исследованиях и в промышленности, например горнорудной, для разделения неоднородных систем: жидких смесей, эмульсий, жидкостей с примесями и т.д. на компоненты используются центрифуги. Центрифуга представляет собой полый барабан, который может вращаться относительно своей оси с большой скоростью, в результате чего происходит расслоение содержимого барабана на компоненты.



В полом тонкостенном цилиндре радиусом R = 40 см, который может вращаться относительно горизонтальной оси (см. рисунок), находится небольшая шайба. При каких значениях угловой скорости ω вращения цилиндра шайба может двигаться вместе с цилиндром, не смещаясь относительно его поверхности? Коэффициент трения шайбы о поверхность цилиндра μ = 0,1. Ускорение свободного падения считать g = 10 м/с^2. Ответ в с$^{-1}$ округлите до целых.

<u>Входные параметры:</u>
R от 10 до 40 см;
μ от 0,1 до 0,4;
Значение *g* менять НЕЛЬЗЯ !

Решение: Формула для расчетов: $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)^{1/4}$

<u>Задание 3</u>

Вариант 1.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.62BD, AF=0.8AB, угол BAC равен 35 градусов. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO=\frac{p}{k}CF \Rightarrow CD=\sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2-(p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP=\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP=\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}-\frac{p}{k}\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}=$$
$$=(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP}=\frac{k}{1-k} \Rightarrow AP=\frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2-k^2BD^2} ,$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2 BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2 BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.50

Вариант 2.
На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.5BD, AF=0.75AB, угол BAC равен 42 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.12

Вариант 3.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.5BD, AF=0.75AB, угол BAC равен 45 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.06

Вариант 4.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.52BD, AF=0.7AB, угол BAC равен 54 градусам.

Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.10

Вариант 5.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.5BD, AF=0.68AB, угол BAC равен 50 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}\ ,$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.22

Вариант 6.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.18BD, AF=0.34AB, угол BAC равен 55 градусам.

Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-(k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2-k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2-k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2\cdot\frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.04

Вариант 7.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.24BD, AF=0.34AB, угол BAC равен 65 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1 - \frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2},$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 1.10

Вариант 8.

На прямой дороге последовательно расположены буровые станции A,D и C. Буферные склады расположены в пунктах B и F, при этом пункт F находится на прямом отрезке AB, прямой путь из B в D перпендикулярен AC, прямой путь из F в C пересекается с путем BD в точке O, при этом OD=0.36BD, AF=0.4AB, угол BAC равен 70 градусам. Чему равно отношение длин $\frac{CF}{BD}$? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Для заданных значений коэффициентов p,k, 0<p<k<1, имеем OD=pBD, AF=kAB. В треугольнике ABC из точки F опустим перпендикуляр FP на AC, прямоугольный треугольник AFP таким образом подобен треугольнику ABD, FP=kBD, из подобия треугольников COD и CFP следует: $CO = \frac{p}{k}CF \Rightarrow CD = \sqrt{(\frac{p}{k}\cdot CF)^2 - (p\cdot BD)^2}$. Далее по теореме Пифагора

$$CP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} \Rightarrow DP = \sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} - \frac{p}{k}\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2} =$$

$$= (1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2 - (k\cdot BD)^2}$$

Из подобия треугольников AFP и ABD :

$$\frac{AP}{DP} = \frac{k}{1-k} \Rightarrow AP = \frac{k}{1-k}\cdot(1-\frac{p}{k})\cdot\sqrt{CF^2 - k^2BD^2}\ ,$$

Из треугольника AFP выражаем

$$tgBAC = \frac{kBD}{\frac{k}{1-k}(1-\frac{p}{k})\sqrt{CF^2-k^2BD^2}} = \frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\frac{CF}{BD})^2 - k^2}}.$$

Из полученного равенства выражаем

$$\frac{CF}{BD} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1-k}{1-\frac{p}{k}}\right)^2 \cdot \frac{1}{tg^2BAC}},$$

$$0 < p < k < 1$$

Ответ: 2.22

Задание 4

Электрическая лампочка накаливания в осветителях, используемых горняками на рудниках, с нитью накала из вольфрама, рассчитана на напряжение U_0 = 4,0 В и мощность P_0 = 3,75 Вт при этом напряжении. Имеется источник напряжения с ЭДС E = 6,0 В. Для того чтобы лампочка осветителя не перегорела при подключении к этому источнику, последовательно с этой лампочкой подключили ещё одну такую же. На какую величину ΔT температура нити накала в лампочках будет ниже расчётной, если известно, что суммарная мощность, выделяемая в цепи при таком подключении двух лампочек, P_1 = 4,80 Вт? При понижении температуры спирали на 1 К от расчётной сопротивление вольфрамовой спирали понижается на 0,058%, т.е. температурный коэффициент сопротивления вольфрамовой нити в рабочем режиме $\alpha = 0{,}00058\ К^{-1}$. Внутренним сопротивлением источника напряжения пренебречь. Ответ в К округлите до десятков (например: 60 К, 360 К, 1520 К).

Входные параметры:
Величина α от $0{,}00046\ К^{-1}$ до $0{,}00058\ К^{-1}$; меняется ВМЕСТЕ с %, как в условии:
0,058% и $\alpha = 0{,}00058\ К^{-1}$.
E и P_1 меняются ТОЛЬКО ПАРОЙ:
E = 7,2 В, P_1 = 6,37 Вт,
E = 6,8 В, P_1 = 5,83 Вт,
E = 6,4 В, P_1 = 5,31 Вт,
E = 6,0 В, P_1 = 4,80 Вт,
E = 5,6 В, P_1 = 4,31 Вт,
E = 5,2 В, P_1 = 3,85 Вт,
E = 4,8 В, P_1 = 3,40 Вт,
E = 4,4 В, P_1 = 2,97 Вт.
Значения E задаются в диапазоне от 4,4 В до 7,2 В. Иначе будет бессмыслица в условии или в ответах.
Значения E и P_0 менять НЕЛЬЗЯ.

Решение: Формула для расчетов: $\Delta T = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{E^2 P_0}{2 P_1 U_0^2}\right)$

Тестовые задания для разминки 2-го тура (10-11 классы):

Вид высококалорийного угля, ценное энергетическое топливо
Графит
Антрацит
Россыпь

Форма рельефа, образованная временным водотоком, прекратившая свое развитие
Балка
Долина
Низина

Часть земной поверхности, с которой сток воды поступает в речную систему
Терраса
Исток
Бассейн

Поднятие одного блока земной коры относительно другого
Взброс
Уступ
Сброс

Понижение на земной поверхности
Пустыня
Впадина
Болото

Стремительное схождение снеговых масс по горным склонам
Сель
Цунами
Лавина

Кратковременный подъем уровня воды в реке, вызванный поступление в реку обильных осадков
Паводок
Прилив
Наводнение

Относительно устойчивые участки литосферных плит
Горы
Прогиб
Платформа

Бурный грязекаменный поток

Сель
Цунами
Лавина

Выходы фундамента, сложенного кристаллическими породами, на поверхность
Бассейн
Чехол
Щит

Группа островов, лежащих на небольшом расстоянии друг от друга, с однородным геологическим происхождением и близких по строению
Агломерация
Скопление
Архипелаг

Место в горном хребте, пониженное и наиболее удобное для перехода с одной его стороны на другую
Ущелье
Перевал
Ледник

Полость в поверхностных толщах земной коры различной формы и размеров, сообщающаяся с поверхностью
Пещера
Балка
Грот

Слабонаклоненная к морю полоса суши, сложенная песком, гравием, галькой, валунами, ракушечником, отлагающимися под действием прибоя
Терраса
Пляж
Коса