ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2015-2016 учебный год

ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2600 кг/м^3, нерудного - 2550 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - kC_2}{1-k} + \frac{\rho_2(C_2 - C_1)}{(1-k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y+\Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y+\Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2592 кг/м^3

Вариант 1.2

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2640 кг/м^3, нерудного - 2585 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2

соответственно. Тогда плотность руды равна $y=\dfrac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x=\dfrac{\rho_1V_1C_1+\rho_2V_2C_2}{\rho_1V_1+\rho_2V_2}$. Обозначим $\dfrac{V_2}{V_1}$ через t, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y=\frac{\rho_1+\rho_2 t}{1+t}\Leftrightarrow t=\frac{\rho_1-y}{y-\rho_2}\Rightarrow x=\frac{C_1-kC_2}{1-k}+\frac{\rho_2(C_2-C_1)}{(1-k)y}=a+\frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a+\frac{b}{y+\Delta y}=a+\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow\frac{b}{y+\Delta y}=\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow y=\frac{-\Delta x\Delta y+\sqrt{(\Delta x\Delta y)^2-4b\Delta x\Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2507 кг/м^3

Вариант 1.3

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2610 кг/м^3, нерудного - 2560 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м^3.

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y=\dfrac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x=\dfrac{\rho_1V_1C_1+\rho_2V_2C_2}{\rho_1V_1+\rho_2V_2}$. Обозначим $\dfrac{V_2}{V_1}$ через t, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y=\frac{\rho_1+\rho_2 t}{1+t}\Leftrightarrow t=\frac{\rho_1-y}{y-\rho_2}\Rightarrow x=\frac{C_1-kC_2}{1-k}+\frac{\rho_2(C_2-C_1)}{(1-k)y}=a+\frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a+\frac{b}{y+\Delta y}=a+\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow\frac{b}{y+\Delta y}=\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow y=\frac{-\Delta x\Delta y+\sqrt{(\Delta x\Delta y)^2-4b\Delta x\Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2602 кг/м^3

Вариант 1.4

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2620 кг/м^3, нерудного - 2570 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 17 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 1%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \dfrac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \dfrac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\dfrac{V_2}{V_1}$ через t, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - kC_2}{1-k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1-k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2612 кг/м^3

Вариант 1.5

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2600 кг/м^3, нерудного - 2549 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \dfrac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \dfrac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\dfrac{V_2}{V_1}$ через t, $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - kC_2}{1-k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1-k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a+\frac{b}{y+\Delta y}=a+\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow\frac{b}{y+\Delta y}=\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow y=\frac{-\Delta x\Delta y+\sqrt{(\Delta x\Delta y)^2-4b\Delta x\Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2568 кг/м^3

Вариант 1.6

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2615 кг/м^3, нерудного - 2564 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y=\frac{\rho_1V_1+\rho_2V_2}{V_1+V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x=\frac{\rho_1V_1C_1+\rho_2V_2C_2}{\rho_1V_1+\rho_2V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y=\frac{\rho_1+\rho_2t}{1+t}\Leftrightarrow t=\frac{\rho_1-y}{y-\rho_2}\Rightarrow x=\frac{C_1-kC_2}{1-k}+\frac{\rho_2(C_2-C_1)}{(1-k)y}=a+\frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a+\frac{b}{y+\Delta y}=a+\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow\frac{b}{y+\Delta y}=\frac{b}{y}+\Delta x\Leftrightarrow y=\frac{-\Delta x\Delta y+\sqrt{(\Delta x\Delta y)^2-4b\Delta x\Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2583 кг/м^3

Вариант 1.7

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2620 кг/м^3, нерудного - 2569 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2

соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - kC_2}{1-k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1-k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2588 кг/м^3

Вариант 1.8

Руда состоит из двух минералов: рудного и нерудного, содержание в них компонента равно соответственно 5% и 2%. Плотность рудного минерала равна 2641 кг/м^3, нерудного - 2590 кг/м^3. Чему равна плотность руды, если при данных условиях увеличение ее на 16 кг/м^3 увеличивает содержание компонента на 0.94%? Ответ дайте в целых кг/м$^{3.}$

Решение. Пусть объемы рудного и нерудного минералов соответственно равны V_1 и V_2, их плотности - ρ_1 и ρ_2, а содержание в них полезного компонента(в долях) C_1 и C_2 соответственно. Тогда плотность руды равна $y = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$, а содержание компонента в ней равно $x = \frac{\rho_1 V_1 C_1 + \rho_2 V_2 C_2}{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}$. Обозначим $\frac{V_2}{V_1}$ через t, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ через k. Тогда

$$y = \frac{\rho_1 + \rho_2 t}{1+t} \Leftrightarrow t = \frac{\rho_1 - y}{y - \rho_2} \Rightarrow x = \frac{C_1 - kC_2}{1-k} + \frac{\rho_2 (C_2 - C_1)}{(1-k)y} = a + \frac{b}{y}.$$

Если искомая плотность равна y, увеличение которой на Δy увеличивает содержание компонента на Δx, то отсюда получим уравнение

$$a + \frac{b}{y + \Delta y} = a + \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow \frac{b}{y + \Delta y} = \frac{b}{y} + \Delta x \Leftrightarrow y = \frac{-\Delta x \Delta y + \sqrt{(\Delta x \Delta y)^2 - 4b\Delta x \Delta y}}{2\Delta x},$$

Подставим данные задачи, получим

Ответ: 2609 кг/м^3

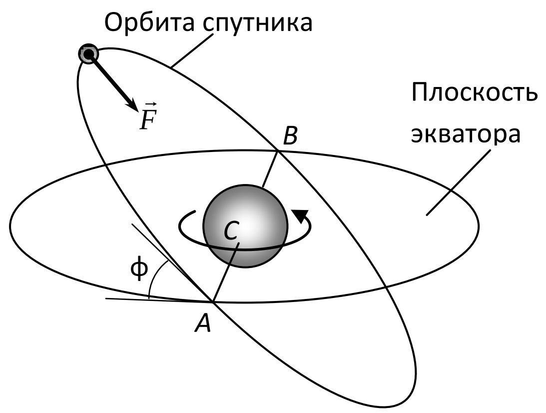
<u>Задание 2</u>

Вариант 2.1

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 30°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 7$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 10^5$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.



Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T,\ \frac{3}{2}T,\ \frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0.$ Для радиуса этой орбиты получаем:

$R=\left(\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M=\rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_0^3=\dfrac{4\pi^2R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho=\frac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\frac{R}{R_0}\right)^3=\frac{3\cdot 3{,}14\cdot 7^3}{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 10^{10}}\approx 4800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

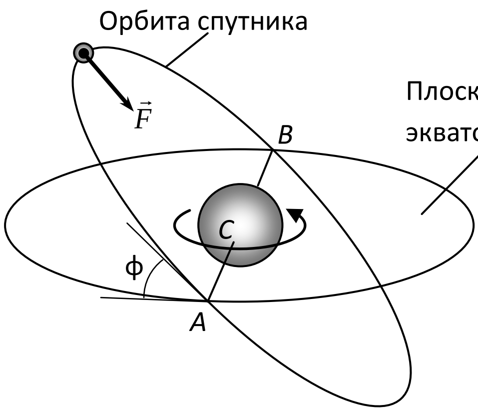
Ответ: $\rho=\dfrac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3\approx 4800\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Вариант 2.2

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 30°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\dfrac{R}{R_0}=5{,}3$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время T = 26 ч. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G=6{,}7\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$.



Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\dfrac{1}{2}T,\ \dfrac{3}{2}T,\ \dfrac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}}=(2n+1)T$, где $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F=G\dfrac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\dfrac{Mm}{R^2}=\dfrac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v=\sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}}=\dfrac{2\pi R}{v}=2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi R_0^3 = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность $\rho = \dfrac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3 = \dfrac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}3^3}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (26 \cdot 3600)^2} \approx 2400\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Ответ: $\rho = \dfrac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3 \approx 2400\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

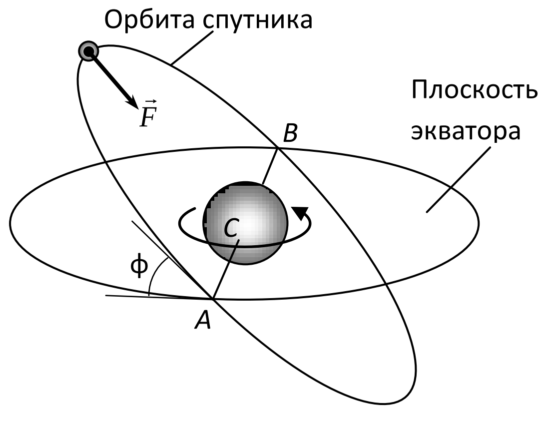
Вариант 2.3

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 45°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\dfrac{R}{R_0} = 6$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время T = 8,9·10^4 с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.



Спутник пересекает плоскость экватора в точках *A* и *B*, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты *AB*, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки *A* в точку *B* за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка *C* на поверхности планеты, лежащая на диаметре *AB*, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\dfrac{1}{2}T$, $\dfrac{3}{2}T$, $\dfrac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$, где *M* – масса планеты, *m* – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\dfrac{Mm}{R^2} = \dfrac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \dfrac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho\cdot\dfrac{4}{3}\pi R_0^3 = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3\cdot 3{,}14\cdot 6^3}{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot\left(8{,}9\cdot 10^4\right)^2} \approx 3800\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3 \approx 3800\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

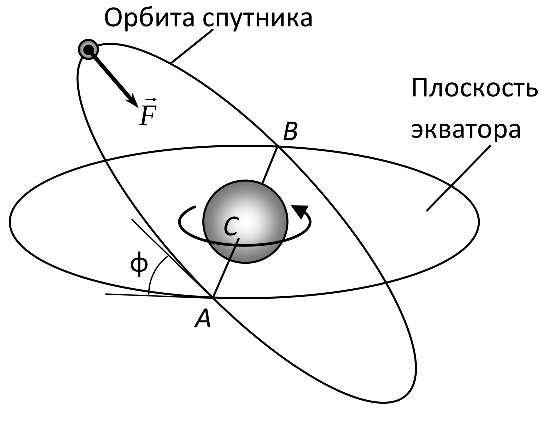
Вариант 2.4

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 45°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\dfrac{R}{R_0} = 6{,}6$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 8{,}6\cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.



Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\dfrac{1}{2}T$, $\dfrac{3}{2}T$, $\dfrac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\dfrac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\dfrac{Mm}{R^2} = \dfrac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \dfrac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \dfrac{4}{3}\pi R_0^3 = \dfrac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3\cdot 3{,}14\cdot 6{,}6^3}{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot\left(8{,}6\cdot 10^4\right)^2} \approx 5500\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \dfrac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\dfrac{R}{R_0}\right)^3 \approx 5500\,\dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

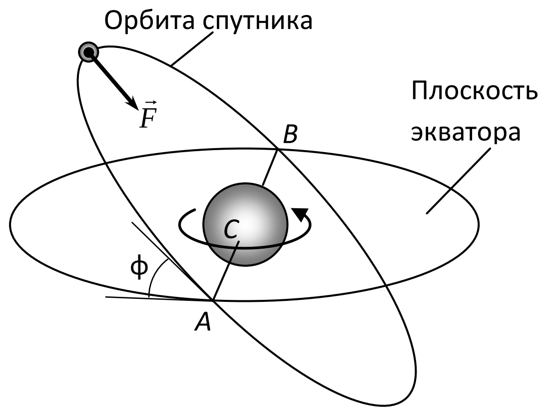
Вариант 2.5

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 60°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\dfrac{R}{R_0} = 2{,}3$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 3{,}6\cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.



Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$.   (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}3^3}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \left(3{,}6 \cdot 10^4\right)^2} \approx 1300\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 1300\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

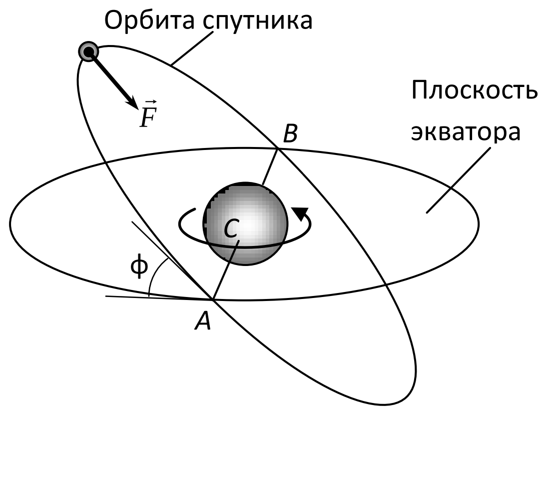
Вариант 2.6

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 60°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 2{,}5$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время T = 9 ч. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Решение.



Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3\cdot 3{,}14\cdot 2{,}5^3}{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot(9\cdot 3600)^2} \approx 2100\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2}\cdot\left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 2100\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

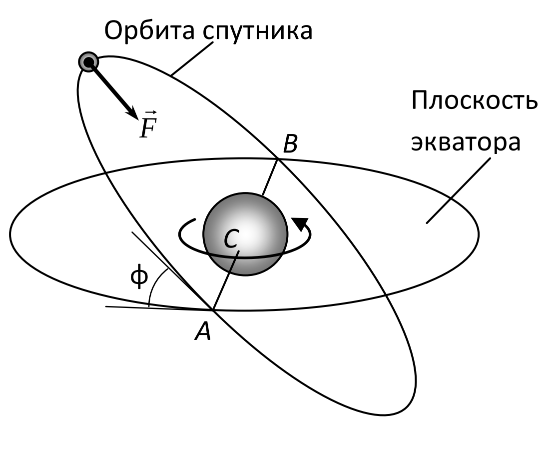
Вариант 2.7

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 15°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 3{,}4$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 5{,}9\cdot 10^4$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной

$$G = 6{,}7\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$



Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$

обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}4^3}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}9 \cdot 10^4\right)^2} \approx 1600\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 1600\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

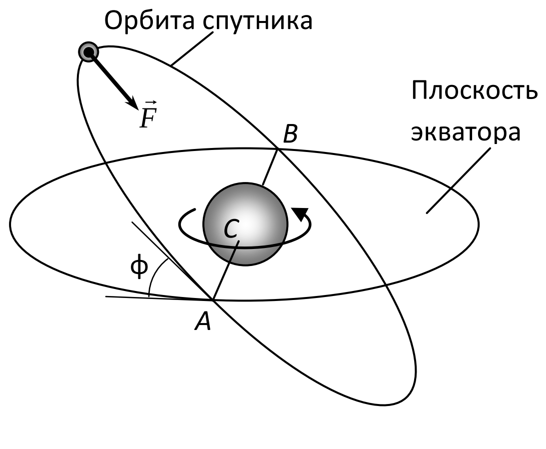
Вариант 2.8

Важным разделом современной геологии является геология планет Солнечной системы. Ряд данных о строении планеты можно получить, не высаживаясь на её поверхность. Например, многое можно узнать, анализируя орбиты её искусственных спутников.

Плоскость круговой орбиты искусственного спутника планеты образует с плоскостью её экватора угол φ = 15°. Пересекая плоскость экватора, спутник каждый раз проходит в зените над одной и той же точкой поверхности планеты. Отношение радиуса наименьшей такой орбиты к радиусу планеты $\frac{R}{R_0} = 16$. Планета делает один оборот вокруг своей оси в гелиоцентрической системе отсчёта за время $T = 5{,}5 \cdot 10^5$ с. Считая планету однородным шаром, определите плотность ρ вещества, слагающего планету. Ответ запишите с точностью до сотен кг/м^3 (например: 1500 кг/м^3, 7600 кг/м^3, 12800 кг/м^3).

Гравитационную постоянную принять равной

$$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$



Решение.

Спутник пересекает плоскость экватора в точках A и B, лежащих на противоположных концах диаметра орбиты AB, проведенного в плоскости экватора. Спутник переходит из точки A в точку B за половину периода $T_{\text{обращ}}$ обращения спутника вокруг планеты. За это время точка C на поверхности планеты, лежащая на диаметре AB, должна оказаться на его противоположной половине. Для этого нужно время, равное $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{2}T$, $\frac{5}{2}T$ и т. д., то есть $\tau = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$. Отсюда $T_{\text{обращ}} = (2n+1)T$, где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$.   (1)

На спутник на орбите действует сила тяготения $\vec{F}$, модуль которой $F = G\frac{Mm}{R^2}$, где M – масса планеты, m – масса спутника. Эта сила вызывает центростремительное ускорение спутника: $G\frac{Mm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$. Из этого равенства получаем скорость спутника на орбите $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ и его период обращения $T_{\text{обращ}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$. Подставив этот результат в уравнение (1), получим: $T_{\text{обращ}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = (2n+1)T$. Отсюда видно, что минимальный радиус орбиты спутника соответствует случаю $n = 0$. Для радиуса этой орбиты получаем: $R = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$. Отсюда масса планеты $M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$, а ее средняя плотность

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 16^3}{6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot \left(5{,}5 \cdot 10^5\right)^2} \approx 1900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Ответ: $\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \cdot \left(\frac{R}{R_0}\right)^3 \approx 1900\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Задание 3

Вариант 3.1

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 43 и 52 градуса с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d*, точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = ctg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta-\gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Подставляя $\beta=43^0$, $\gamma=52^0$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.629.

Ответ: 51^0

Вариант 3.2

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 41 и 42 градуса с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d*, точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = \mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma .$$

Подставляя β=41^0, γ=42^0 и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.707.

Ответ: 45^0

Вариант 3.3

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 39 и 52 градусов с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть x – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d*, точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = \mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Подставляя $\beta=39^0$, $\gamma=52^0$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.644.

Ответ: 50^0

Вариант 3.4

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 46 и 56 градусов с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d*, точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = \mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}+(ctg\gamma-ctg\beta)^2=\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}-2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x=\cos(\beta-\gamma)-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma\,.$$

Подставляя β=46^0, γ=56^0 и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.587.

Ответ: 54^0

Вариант 3.5

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 35 и 52 градуса с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM=\frac{1}{\sin\beta},AN=\frac{1}{\sin\gamma},MN^2=\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}-2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d*, точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2=2-2\cos\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2},KN=ctg\gamma-ctg\beta\Rightarrow MN^2=4\sin^2\frac{\alpha}{2}+(ctg\gamma-ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}+(ctg\gamma-ctg\beta)^2=\frac{1}{\sin^2\beta}+\frac{1}{\sin^2\gamma}-2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x=\cos(\beta-\gamma)-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma\,.$$

Подставляя β=35^0, γ=52^0 и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.655.

Ответ: 49^0

Вариант 3.6

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 31 и 46 градусов с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d*, точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = \mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta-\gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Подставляя $\beta=31^0$, $\gamma=46^0$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.719.

Ответ: 44^0

Вариант 3.7

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 36 и 50 градусов с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка К лежит на прямой *d,* точка *O* лежит на при этом плоскость МОК перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = \mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (\mathrm{c}tg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta-\gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Подставляя $\beta=36^0$, $\gamma=52^0$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x$=0.67.

Ответ: 48^0

Вариант 3.8

Важным моментом обработки размеченного кристалла является распиливание на заготовки, во время которого очень важно точно выдержать запланированные размеры и избежать возможного возникновения трещин и сколов. Кристалл имеет форму правильного тетраэдра *SABC*. Распиловочным диском делается плоский разрез, который проходит через вершину *A* основания тетраэдра так, что линии разреза на смежных боковых гранях *SAB* и *SAC* составляют соответственно углы 29 и 41 градус с боковым ребром *SA*. Чему равен угол с вершиной *A* между линиями разреза? Ответ дайте в целом числе градусов.

Решение.

Задача в более общем виде может быть сформулирована так: имеется двугранный угол величины α с вершиной *A*, плоскость проходит через вершину *A* и пересекает грани этого двугранного угла так, что линии пересечения составляют углы β и γ с ребром двугранного угла. Требуется найти угол между этими линиями пересечения. Для этого на гранях проведем прямые *b, d* параллельно ребру двугранного угла на расстоянии 1 от ребра. Пусть точки *M,N* лежат на прямых *b, d* и прямые *AM* и *AN* составляют углы β и γ с ребром двугранного угла, без ограничения общности считаем β < γ. Пусть *x* – искомый угол, величины

$$AM = \frac{1}{\sin\beta}, AN = \frac{1}{\sin\gamma}, MN^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}.$$

Пусть далее точка K лежит на прямой *d*, точка O лежит на при этом плоскость MOK перпендикулярна ребру двугранного угла. Величина

$$MK^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2}, KN = ctg\gamma - ctg\beta \Rightarrow MN^2 = 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2.$$

Из полученных соотношений получаем уравнение

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} + (ctg\gamma - ctg\beta)^2 = \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} - 2\frac{\cos x}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},$$

из которого следует

$$\cos x = \cos(\beta - \gamma) - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\gamma.$$

Подставляя $\beta=29^0$, $\gamma=41^0$ и учитывая, что величина угла α между гранями в правильном тетраэдре равна $\arccos\frac{1}{3}$, получаем $\cos x=0.766$.

Ответ: 40^0

Задание 4

Вариант 4.1

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ ^oC) и из него выделяется объем $V_0 = 50$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 534$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п = 510$ кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б = 580$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}\cdot\text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б$, а ее объем $V_0 = V_п + V_б$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \dfrac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки. Тогда $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \dfrac{8{,}31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{510 \cdot 50}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{580 - 534}{580 - 510} \approx 8{,}6$ %.

Ответ: $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 8{,}6$ %

Вариант 4.2

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ ^oC) и из него выделяется объем $V_0 = 40$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 530$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п = 510$ кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б = 580$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б,\ \text{а ее объем } V_0 = V_п + V_б.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \dfrac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \dfrac{8{,}31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{510 \cdot 40}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{580 - 530}{580 - 510} \approx 7{,}5$ %.

Ответ: $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 7{,}5$ %

Вариант 4.3

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа V = 10^5 м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению p_0 = 10^5 Па и температуре t = 0 ^{o}С) и из него выделяется объем V_0 = 40 м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью ρ = 540 кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п$ = 44 г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п$ = 510 кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б$ = 580 кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \dfrac{Дж}{К \cdot моль}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \text{ а ее объем } V_0 = V_п + V_б.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \frac{8{,}31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 40}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 540}{580 - 510} \approx 6{,}0$ %.

Ответ: $\alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 6{,}0$ %

Вариант 4.4

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ $^\circ$C) и из него выделяется объем $V_0 = 40$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 535$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п = 510$ кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б = 580$ кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31 \ \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.
Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б$, а ее объем $V_0 = V_п + V_б$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \dfrac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \dfrac{8{,}31 \cdot 273}{10^5 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{510 \cdot 40}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{580 - 535}{580 - 510} \approx 6{,}8$ %.

Ответ: $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 6{,}8$ %

Вариант 4.5

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ ^oC) и из него выделяется объем $V_0 = 60$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 535$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п = 44$ г/моль, плотность жидкого пропана

$\rho_п$ = 510 кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б$ = 580 кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \dfrac{Дж}{К \cdot моль}$.

Решение.
Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б$, а ее объем $V_0 = V_п + V_б$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \dfrac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \dfrac{8{,}31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{510 \cdot 60}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{580 - 535}{580 - 510} \approx 5{,}1$ %.

Ответ: $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 5{,}1$ %

Вариант 4.6

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.
Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ °C) и из него выделяется объем $V_0 = 60$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 530$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого

пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п$ = 44 г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п$ = 510 кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б$ = 580 кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \dfrac{Дж}{К \cdot моль}$.

Решение.
Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б$, а ее объем $V_0 = V_п + V_б$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \dfrac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \dfrac{8{,}31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{510 \cdot 60}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{580 - 530}{580 - 510} \approx 5{,}6$ %.

Ответ: $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 5{,}6$ %

Вариант 4.7

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ ^{o}С) и из него выделяется объем $V_0 = 60$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 540$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п$ = 44 г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п$ = 510 кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б$ = 580 кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б$, а ее объем $V_0 = V_п + V_б$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \frac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \frac{8{,}31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \frac{510 \cdot 60}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{580 - 540}{580 - 510} \approx 4{,}5$ %.

Ответ: $\alpha = \frac{RT}{p_0 V} \cdot \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 4{,}5$ %

Вариант 4.8

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит в основном из метана, но содержит также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Кроме того, природный газ может содержать в небольшом количестве примесные газы, например, сернистый водород и пары воды.

Из природного горючего газа, добываемого на газовом месторождении, перед транспортировкой по газопроводу выделяют методом сжатия при низких температурах пропан и бутан в виде жидкой пропан-бутановой смеси. Определите процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе, если за сутки на месторождении добывается объем газа $V = 2 \cdot 10^5$ м^3 (приведенный к нормальным условиям: давлению $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 0$ ^{o}С) и из него выделяется объем $V_0 = 85$ м^3 жидкой пропан-бутановой смеси плотностью $\rho = 540$ кг/м^3. Численный ответ запишите с точностью до десятых долей процента (например, 2,3%, 35,0%, 86,7%). Считать, что: 1) пропан извлекается из природного газа практически полностью; 2) при образовании жидких пропан-бутановых смесей путем смешивания двух раздельных жидкостей – жидкого пропана и жидкого бутана – объем смеси совпадает с суммарным объемом исходных жидких компонент. Молярная масса пропана $M_п$ = 44 г/моль, плотность жидкого пропана $\rho_п$ = 510 кг/м^3, плотность жидкого бутана $\rho_б$ = 580 кг/м^3, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}}$.

Решение.

Пусть объем пропана в добываемой за сутки жидкой пропан-бутановой смеси равен $V_п$, а объем бутана в этой смеси равен $V_б$. Тогда масса этой смеси

$$m = \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б\text{, а ее объем } V_0 = V_п + V_б.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} \rho V_0 = \rho_п V_п + \rho_б V_б, \\ V_0 = V_п + V_б \end{cases}$$

относительно $V_п$ и $V_б$, получим, в частности,

$$V_п = \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} V_0,$$

откуда масса добытого за сутки пропана

$$m_п = \rho_п V_п = \rho_п V_0 \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п},$$

а его количество молей

$$\nu_п = \frac{m_п}{M_п} = \frac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \frac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п}.$$

Процентное содержание α молекул пропана в добываемом газе равно

$$\alpha = \frac{\nu_п}{\nu},$$

где $\nu = \dfrac{p_0 V}{RT}$ – количество молей природного газа, добытого на месторождении за сутки.

Тогда $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} = \dfrac{8{,}31 \cdot 273}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^5} \cdot \dfrac{510 \cdot 85}{44 \cdot 10^{-3}} \cdot \dfrac{580 - 540}{580 - 510} \approx 6{,}4$ %.

Ответ: $\alpha = \dfrac{RT}{p_0 V} \cdot \dfrac{\rho_п V_0}{M_п} \cdot \dfrac{\rho_б - \rho}{\rho_б - \rho_п} \approx 6{,}4$ %

Тестовые задания для разминки 2-го тура (10-11 классы):

Возраст Земли оценивается в:

46 млрд.лет

4,6 млрд.лет

4,6 млн.лет

Мельчайшие обломки минералов и горных пород, вылетающие в атмосферу при вулканических извержениях называются:

Пепел

Планктон

Аллювий

Процесс разрушения горных пород на поверхности Земли под воздействием физических, химических и биологических факторов получил название:

Абразия

Вымораживание

Выветривание

Источник горячей (80-100°С) воды в областях вулканической деятельности называют:

Ключ

Гейзер

Сель

Как называются невысокие серповидные в плане песчаные холмы по берегам морей, рек:

Останцы

Террасы

Дюны

Скопления полезного ископаемого различной формы:

Морена

Залежь

Карст

Округлая впадина на месте вулканического конуса называется

Кальдера

Атолл

Скважина

Речная долина с крутыми почти отвесными бортами получила название

Терраса

Бархан

Каньон

Мера массы драгоценных камней

Карат

Унция

Баррель

Растворение горных пород поверхностными или подземными водами с образованием сообщающихся пустот различного размера
Выветривание
<u>Карст</u>
Абразия

Открытая горная выработка значительных размеров, служащая главным образом для добычи полезных ископаемых
<u>Карьер</u>
Жила
Воронка

Твердое тело из закономерно расположенных атомов и ионов, способное принимать облик многогранника называется
<u>Кристалл</u>
Туф
Валун

Магма, вытекшая на поверхность Земли, и потерявшая летучие компоненты получила название
Сель
Карст
<u>Лава</u>

Большие скопления льда в горных или полярных областях, нередко передвигающиеся называют
<u>Ледники</u>
Сталактиты
Конкреции

Как называется наружная твердая оболочка Земли, включающая земную ору и часть верхней мантии
<u>Литосфера</u>
Стратосфера
Геоид

Сложный по составу флюидно-силикатный расплав в недрах Земли называют
Карстом
Мантией
<u>Магмой</u>

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[1]

олимпиады школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по геологии

10-11 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **40** баллов до **89** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **85** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **84** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **65** баллов до **74** баллов включительно.*

[1] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии*