ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ
ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
2011/2012 УЧЕБНЫЙ ГОД

Задание 1.

Ответ: $16\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Задание 2.
Ответ: v = 3500 м/с, L = 7373 км.

Задание 3.

Ответ: $\left[\begin{array}{c} x=0 \\ x\in[\frac{2012}{2013}k,\frac{2012}{2011}k],k=1,2,3,\ldots,1005 \\ x\geq\frac{2012}{2013}\cdot 1006 \end{array}\right.$

Задание 4.
Ответ: V=7500 м^3.

Задание 5.

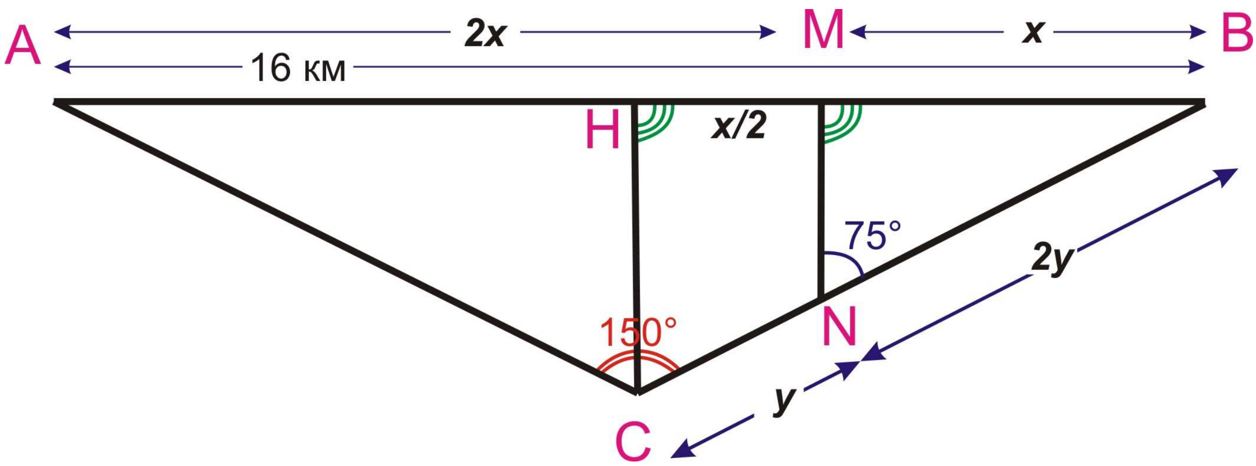
Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Задание 6.
Ответ: $B_{ж1}=\sqrt{\left(\dfrac{E_{\max}}{S\omega}\right)^2+B_з^2\pm 2\cdot\dfrac{E_{\max}}{S\omega}\cdot B_з\cdot\cos\varphi}$.

Задание 1.

Дано: AB=16 (км); AM= 2/3 AB; BN= 2/3 BC; ∠ ACB = 150°; ∠ BNM = 75°

Найти: AC и CB



Решение. Проведем биссектрису ∠ ACB (CH).

MN ∥ CH (так как соответственные углы ∠BNM и ∠BCH равны)

∠BMN=∠BHC как соответственные углы при параллельных прямых MN и CH и секущей AB $\Rightarrow$ Δ BMN подобен Δ BHC (по двум углам). $\Rightarrow$

$\frac{BN}{BC}=\frac{BM}{BH}=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ MH=$\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ AH= $2x$ - $\frac{x}{2}$ $=\frac{3}{2}x$; BH= $x+\frac{x}{2}$ $=\frac{3}{2}x$; т.е. AH=BH $\Rightarrow$ CH-медиана

Так-так медиана совпала с биссектрисой, то ΔABC является равнобедренным.

По теореме косинусов

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 150^o$ Пусть AC=CB=z,тогда

$256 = z^2 + z^2 + 2z^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 256 = z^2(2+\sqrt{3}) \Leftrightarrow z^2 = \frac{256}{2+\sqrt{3}}$ Так как по условию задачи расстояние есть величина положительная, то из двух корней этого квадратного уравнения решением является только $z = \frac{16}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Ответ: Расстояние AC = BC = $\frac{16}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

Задание 2.

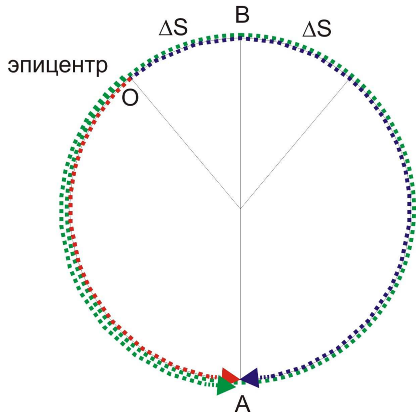
Дано:

t_1 = 11часов 15мин 35сек;

t_2= 13часов 16мин 51сек;

t_3= 14часов 27мин 04сек;

R=6400км.



Найти:

v сейсмической волны,

расстояние от станции до эпицентра по поверхности Земли.

Решение. Обозначим на чертеже точкой O эпицентр, точкой A – положение сейсмической станции. Проведем через эти 2 точки меридиан длиной $2\pi R$. В общем случае его можно разделить на 2 неравные дуги. Отметим, что эпицентр O не совпадает с противоположной A точкой на поверхности (B), так как в этом случае в момент времени t_1 синхронно фиксировались бы волны прошедшие по поверхности в противоположных направлениях, в момент времени t_2 – прошедшие +1 виток итд. Таким образом, t_2-t_1 было бы равно t_3-t_2, что противоречит условию задачи. То есть $O \neq B$.

Обозначим за ΔS расстояние по поверхности Земли от O до B.

Тогда в момент времени t_1 волна уже прошла по поверхности Земли искомый путь OA (обозначен на рисунке **красной дугой**). В момент времени t_2 волна прошла путь OBA=OA+2ΔS в противоположном направлении (обозначен на рисунке **синей дугой**). Следующий акт фиксации волны сейсмической станцией в момент времени t_3 соответствует пробегу OA+полный оборот вокруг Земли (**выделено на чертеже зеленым цветом**). Тогда скорость волны v= $\dfrac{2\pi R}{t_3 - t_1}$,

разность хода $2\Delta S = v(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow 2\Delta S = \dfrac{2\pi R}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow \Delta S = (\dfrac{2\pi R}{t_3 - t_1}(t_2 - t_1))/2$

$\Leftrightarrow \Delta S = \pi R(\dfrac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1})$.

Так как дуга AB=πR, а AO=AB-ΔS имеем, что AO=$\pi R - \pi R(\dfrac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}) \Leftrightarrow$ AO=

$\pi R(1 - (\dfrac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1})) \Leftrightarrow$ AO= $\pi R(\dfrac{t_3 - t_1 - t_2 + t_1}{t_3 - t_1}) \Leftrightarrow$ AO= $\pi R(\dfrac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1})$

Ответ (в общем виде): скорость = $\dfrac{2\pi R}{t_3 - t_1}$, расстояние = $\pi R(\dfrac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1})$

Для получения ответа в числах переведем время в секунды:

t_1 = 11ч15м.35сек = 40535 сек. t_2= 13ч16м51сек= 47811 сек. t_3= 14ч27м04сек= 52024 сек.

Тогда скорость волны = 2×3,1415926×6400 км/11489 сек = 3,5 км/сек;

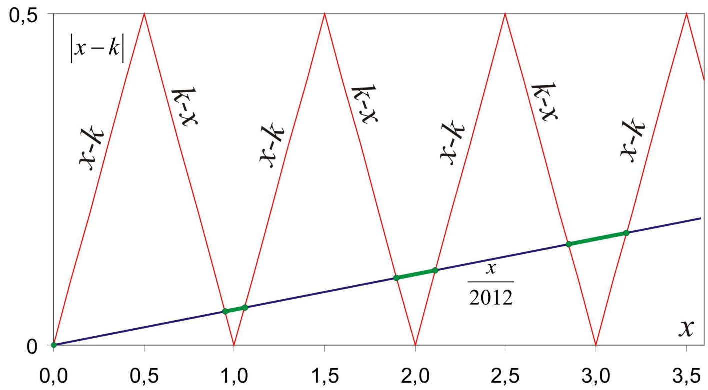
Расстояние до эпицентра = 3,1415926×6400км (52024сек – 47811 сек)/(52024 сек -40535 сек) = 7372,912 км.

Ответ (в числах): скорость =3,5 км/сек; расстояние = 7372,912 км.

Задание 3.

Дано:
x – точная величина измеренного объема газа,
k – округленный результат измерения (ближайшее целое значение измеренного объема газа)

Найти: при каких x
$$|x-k| \le \frac{x}{2012}?$$



Решение. Строим график зависимости абсолютной погрешности $|x-k|$ от x (на чертеже изображен красной линией). Как видно из чертежа, графиком абсолютной погрешности является чередование графиков x-k и k-x, имеющих максимумы, равные 0,5 в точках x=0,5 1,5 2,5 итд. и минимумы, равные 0 в точках x= 0, 1, 2, 3 итд.

Построим график функции $y=\frac{x}{2012}$ (на чертеже изображен синей прямой).

Найдем точки пересечения двух графиков:

1) x=0, $|x-k|$=0 (если газа нет, то и абсолютная ошибка также равна 0)

2) $k-x=\frac{x}{2012} \Leftrightarrow 2012k=2013x \Leftrightarrow x=\frac{2012}{2013}k$

3) $x-k=\frac{x}{2012} \Leftrightarrow 2012x-2012k=x \Leftrightarrow 2011x=2012k \Leftrightarrow x=\frac{2012}{2011}k$

Из чертежа видно, что неравенство $|x-k| \le \frac{x}{2012}$ выполняется на интервалах от $\frac{2012}{2013}k$ до $\frac{2012}{2011}k$; k=1,2,3…1005

В точке k=1006 $\frac{x}{2012}=|k-x|$, а при больших значениях x неравенство $\frac{x}{2012}>|k-x|$ будет всегда выполняться. В точке k=1006 $\frac{x}{2012}=1006-x$ Таким образом, $x=\frac{2012\cdot 1006}{2013}$=1005.500248

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x\in\left[\frac{2012}{2013}k;\frac{2012}{2011}k\right] \\ k=1,2,3\ldots 1005 \end{cases} \\ x\ge 1005.500248 \end{array}\right.$$

Задание 4.

Дано: $S = 5000\,м^2$; $h = 2\,м$; $t_1 = 30^\circ C$; $t_2 = 1200^\circ C$; $t_3 = 1100^\circ C$; $t_4 = 100^\circ C$;

$c_1 = 840\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $c_2 = 4.2\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$; $\rho_1 = 2700\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $\rho_2 = 1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$; $r = 2300\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$; $\lambda = 350\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$

Найти: V лавы, требуемый для полного выкипания озера.
Решение.

$$m_{воды} = Sh\rho_2$$

$$Q_{выкипанияозера} = m_{воды}(c_2(t_4 - t_1) + r)$$

$$m_{лавы} = V\rho_1$$

$Q_{лавы} = m_{лавы}(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda)$ отсюда следует, что

$$Sh\rho_2(c_2(t_4 - t_1) + r) = V\rho_1(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda) \Leftrightarrow V = \frac{Sh\rho_2(c_2(t_4 - t_1) + r)}{\rho_1(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda)}$$

Ответ: $V = \frac{Sh\rho_2(c_2(t_4 - t_1) + r)}{\rho_1(c_1(t_2 - t_3) + c_1(t_3 - t_4) + \lambda)}$

Ответ (в числах): требуемый объем лавы = 7541.136 $м^3$

Так как при увеличении глубины растет давление, следовательно, с глубиной увеличивается и температура кипения воды. На глубине 20 м давление $P = P_A + \rho_2 gH$ =3 атм. По справочным данным вода при таком давлении кипит при $188^\circ C$

При $t_4 = 100^\circ C$ теплота нагрева и испарения 1кг воды $= (c_2(t_4 - t_1) + r)$ = 2594 $\frac{кДж}{кг}$

При $t_5 = 188^\circ C$ теплота нагрева и испарения 1кг воды = $(c_2(t_5 - t_1) + r)$ = 2964 $\frac{кДж}{кг}$ (т.е. на дне 20 метрового озера она будет больше на 14%). Однако, учитывая то, что:

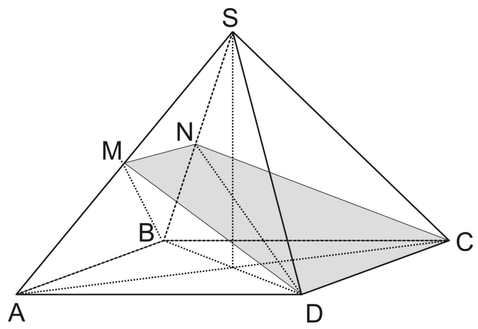
1) в среднем вода в озере будет находиться под меньшим давлением;
2) вода будет выкипать со дна (глубина будет постоянно уменьшаться);
3) присутствуют процессы диффузии

можно утверждать, что результат (требуемый объем лавы) изменится крайне незначительно (не больше нескольких %).

Задание 5.

Дано: ABCD – квадрат со стороной *a*,
ABCDS -правильная пирамида,
$V_{ABCDMN} = V_{CDMNS}$
SA=SB=SC=SD=*b*

Найти: $\frac{SM}{SA}$?



Решение. CD ‖ пл ABS $\Rightarrow$ MN ‖ CD $\Rightarrow$ CDMN - трапеция.

Обозначим $k = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SB}; k \in (0;1)$

Высоты пирамид *MABD* и *NBCD*, опущенные на плоскость *ABCD*, равны: MN ‖ ABCD

Кроме того, площади ABD и BCD равны $\frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{MABD} = V_{NBCD}$;

$$\frac{V_{DBMN}}{V_{DABM}} = \frac{S\Delta BMN}{S\Delta ABM} = \frac{MN}{AB} = k$$

По условию: $\frac{V}{2} = V_{MABD} + V_{NBCD} + kV_{MABD} \Leftrightarrow \frac{V}{2} = V_{MABD}(2+k)$ (равенство 1)

$$\frac{V_{SDMN}}{V_{SCDN}} = \frac{S\Delta DMN}{S\Delta CDN} = k \ \Rightarrow$$

$$\frac{V_{SDMN}}{V_{DBMN}} = \frac{S\Delta SMN}{S\Delta BMN} = \frac{k}{1-k}$$

$$S\Delta SMN = \frac{k}{1-k} S\Delta BMN \ ; V_{SDMN} = \frac{k}{1-k} V_{DBMN} \ \Rightarrow \frac{V}{2} = \frac{k}{1-k}V_{DBMN} + \frac{1}{1-k}V_{DBMN}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{V}{2} = V_{DBMN}\left(\frac{1+k}{1-k}\right)(2); из(1) \\ \frac{V}{2} = V_{DBMN}\left(\frac{2+k}{k}\right)(3) \end{cases}$$

таким образом $1 = \frac{1+k}{1-k} \cdot \frac{k}{2+k} \Leftrightarrow \frac{k(k+1)}{(1-k)(2+k)} = 1$.

Т.к. $k \in (0;1)$ то $2k^2 + 2k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Тогда $SM = SA\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $MA = (1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2})SA \Leftrightarrow MA = \frac{3-\sqrt{5}}{2}SA$

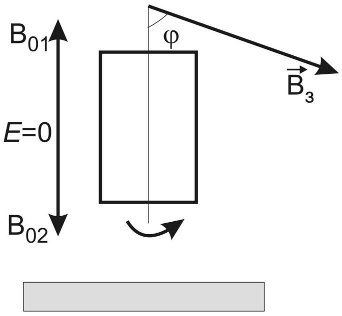
$$\frac{SM}{MA} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{5}+2}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Ответ: срез делит боковую сторону в отношении $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Задание 6.

Дано: S, ω, E_{max}, $\varphi \in 0-90^{\circ}$ **Найти**: $\vec{B}_{Ж}$

Решение:



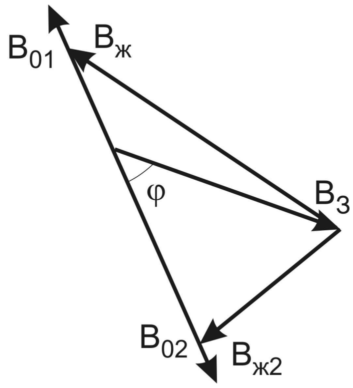
$$E_{\max} = B_0 S\omega$$

$$B_0 = \frac{E_{\max}}{S\omega}$$

$$E = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\varphi = B_0 \cos \omega t$$

$$E = -\omega \sin \omega t \cdot BS = E_{\max} \sin \omega t$$



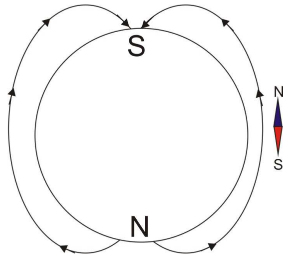
$$\vec{B}_0 = \vec{B}_З + \Delta\vec{B}_Ж$$

Так как существует 2 варианта ориентации вектора $\vec{B}_0$, схематически показанные на чертеже как B_{01} и B_{02}, то по теореме косинусов существует 2 решения:

Ответ:

1) $B_Ж^2 = B_0^2 + B_З^2 - 2B_0 B_З \cos\varphi$

2) $B_Ж^2 = B_0^2 + B_З^2 + 2B_0 B_З \cos\varphi$



Так как одинаковые полюса отталкиваются, а не притягиваются, то географический северный магнитный полюс, на который указывает северная стрелка компаса (синего цвета), с физической точки зрения является южным (см. схему).