

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 1

Решения

Задание 1. Задача сводится к нахождению множества решений неравенства $\frac{\lg(6x-5)}{\lg x} \leq 2$. В этом неравенстве множество допустимых значений неизвестного

представляет собой объединение промежутков $(\frac{5}{6}, 1) \cup (1, \infty)$. При значениях неизвестного

из интервала $(\frac{5}{6}, 1)$ значение $\lg x$ отрицательно, поэтому неравенство задачи эквивалентно условию $\lg(6x-5) \geq 2\lg x$. В силу монотонного возрастания логарифма по десятичному основанию и равенства $2\lg x = \lg x^2$ это условие эквивалентно неравенству $x^2 - 6x + 5 \leq 0$. Множество решений последнего неравенства, именно отрезок $[1, 5]$, не пересекается с интервалом $(\frac{5}{6}, 1)$, поэтому на данном интервале решений нет. Если $x \in (1, \infty)$, то $\lg x > 0$, поэтому неравенство задачи эквивалентно условию $\lg(6x-5) \leq 2\lg x$, откуда $x^2 - 6x + 5 \geq 0$. Следовательно, при $x \in (1, \infty)$ получаем $x \in [5, \infty)$.

Ответ: $x \in [5, \infty)$.

Задание 2.

Зависимость координат камня от времени:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t, \\ y(t) = H + v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Выражая из первого равенства t через x : $t = \frac{x}{v \sin \alpha}$ и подставляя его во второе равенство,

получим уравнение траектории: $y(x) = H + x \operatorname{ctg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha}$. В момент падения на

землю $x = R$, $y = 0$. Получаем уравнение для v_0 : $0 = H + R \operatorname{ctg} \alpha - \frac{gR^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha}$.

Отсюда $v_0 = \frac{R}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(H + R \operatorname{ctg} \alpha)}}$.

$$\text{Ответ: } v_0 = \frac{R}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(H + R \operatorname{ctg} \alpha)}} = \frac{400}{\sqrt{7}} \approx 151 \text{ (м/с)}.$$

Задание 3. Искомая глубина h находится из уравнения $\frac{2000}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{2h}$, где $150 \leq h \leq 2000$. В данном уравнении левая часть убывает по переменной h , а правая возрастает. Подставляя $h=200$, отсюда заключаем, что это значение является единственным корнем на указанном промежутке.

Ответ: на глубине $h=200$ м.

Задание 4.

На нефть в трубе между высотами h и $h + \Delta h$ действуют по вертикали сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления \vec{F}_1 со стороны нефти, лежащей ниже, и сила давления \vec{F}_2 со стороны нефти, лежащей выше. Модули этих сил равны:

$$mg = \rho g S \Delta h, F_1 = pS, F_2 = (p + \Delta p)S,$$

где S – площадь поперечного сечения трубы, p – давление в жидкости на высоте h , $p + \Delta p$ – давление в жидкости на высоте $h + \Delta h$. По условию, жидкость движется относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей, равномерно и прямолинейно. Поэтому сумма сил, приложенных к выделенному объему жидкости, равна 0.

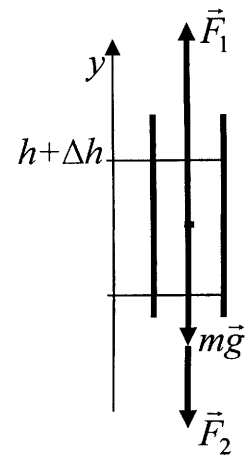
В проекциях на ось y получаем:

$$F_1 - F_2 - mg = pS - (p + \Delta p)S - \rho g S \Delta h = 0,$$

откуда

$$\Delta p = -\rho g \Delta h, \frac{\Delta p}{\Delta h} = -\rho g = -8500 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2).$$

Ответ: $\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\rho g = -8500 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}^2).$



Задание 5. Пусть x - величина реальной скорости, тогда условие $|x-280| \leq 30$ означает $250 \leq x \leq 310$, а условие $|x-250| \leq 30$ дает $220 \leq x \leq 280$. Отсюда следует, что $250 \leq x \leq 280$, т.е. $-15 \leq x-265 \leq 15$, или, что то же самое, $|x-265| \leq 15$.

Ответ: 15.

Задание 6.

Вычислим парциальное давление водяного пара при $t_1 = 90^\circ\text{C}$:

$$p_1 = \varphi \cdot p_{\text{н1}} = 0,045 \cdot 70,18 \text{ кПа} \approx 3,158 \text{ кПа}.$$

Роса на стенках полости появится при температуре, при которой данный пар станет насыщенным. Как видно из таблицы, давление p_1 практически равно давлению насыщенного пара при температуре $t_2 = 25^\circ\text{C}$. Однако при понижении температуры давление пара в полости понижается, т.к. по условию задачи объем полости постоянен, а ее стенки непроницаемы для молекул воды. Поэтому при температуре t_2 давление водяного пара равно, в соответствии с законом Шарля,

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 3,158 \text{ кПа} \cdot \frac{298 \text{ К}}{363 \text{ К}} \approx 2,592 \text{ кПа}.$$

Это значение давления ближе всего к давлению насыщенного пара при температуре $t_3 = 22^\circ\text{C}$. Изменение температуры $t_3 - t_2 = -3^\circ\text{C}$, что составляет 1% от абсолютной температуры T_2 . Учет этого изменения температуры даст такое же (на 1%) понижение давления, и мы получим при t_3 давление исходного пара $p_3 \approx 2,566 \text{ кПа}$. Пар все еще не будет насыщенным, но насыщение произойдет в долях градуса от t_3 . Поэтому ответ: $t \approx 22^\circ\text{C}$.

Проверка ответа (от участников олимпиады не требуется). Пусть роса выпала на стенках точно при 22°C . Тогда выше этой температуры пар уже ненасыщенный, и к нему применим закон Шарля: $p/T = \text{const}$. Получаем парциальное давление этого пара при $t_1 = 90^\circ\text{C}$:

$$p_{22} = p_n(22^\circ\text{C}) \cdot \frac{T_1}{T_3} = 2,645 \text{ кПа} \cdot \frac{363 \text{ К}}{295 \text{ К}} \approx 3,255 \text{ кПа}.$$

Если же роса выпала на стенках точно при $t_4 = 21^\circ\text{C}$, то аналогичным образом получаем при $t_1 = 90^\circ\text{C}$:

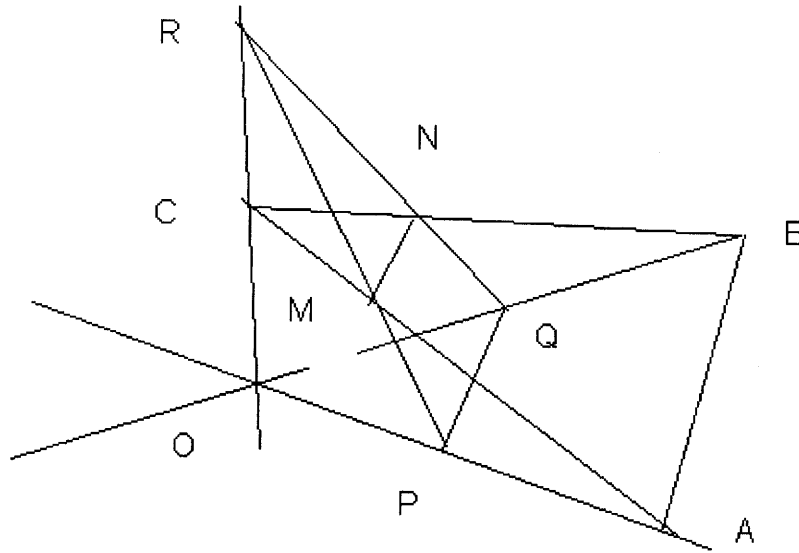
$$p_{21} = p_n(21^\circ\text{C}) \cdot \frac{T_1}{T_4} = 2,488 \text{ кПа} \cdot \frac{363 \text{ К}}{294 \text{ К}} \approx 3,072 \text{ кПа}.$$

Давление p_1 находится практически посередине между этими двумя значениями.

Задание 7. Сначала рассмотрим плоскость Oxz , на оси z отложим точку L с координатами $(0, 0, \frac{1}{3})$. Тогда прямая LP параллельна CM , треугольники CMR и LPR подобны: $RC:RL=3:5$. Следовательно, точка M имеет координаты $(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5})$. Отсюда отношение $CM:CA=1:3$. Аналогично отношение $CN:CB=1:5$, треугольник CMN подобен треугольнику CAB : $CM:CA=CN:CB=MN:AB=1:5$. Площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{25}$ площади треугольника CAB , т.е. $\frac{1}{25} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{50}$. Далее, площадь треугольника RCM равна:

$S_{\Delta RCM} = \frac{1}{2} \cdot CR \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ Объем кристалла как многогранника с вершинами C, M, N, O, P и Q (Рис. 1) будем вычислять разность объемов пирамид $ROPQ$ и $NRCM$. Объем пирамиды $NRCM$ равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta RCM} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{150}$. В то же время объем пирамиды $QROP$ равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ROP} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$. Отсюда искомый объем кристалла равен $\frac{1}{18} - \frac{1}{150} = \frac{11}{225}$.

Ответ: площадь треугольника CMN равна $\frac{\sqrt{3}}{50}$, объем кристалла равен $\frac{11}{225}$.



Задание 8.

Сопротивление проводника AB равно

$$R = R_A + R_B = R_{AC} + R_{CD} + R_{DB} = \rho_0 \frac{x}{S} + \rho \frac{b}{S} + \rho_0 \frac{L-x-b}{S} = \rho_0 \frac{L-b}{S} + \rho \frac{b}{S},$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$, откуда

$$b = \frac{(R_A + R_B)S - \rho_0 L}{\rho - \rho_0} \approx 51,25 \text{ м.}$$

Участок CD содержит в себе среднюю точку отрезка AB , т.к. иначе R_A или R_B равнялся

$$\rho_0 \frac{L}{2S} \approx 217 \text{ Ом.}$$

Поэтому

$$R_A = R_{AC} + R_{CO} = \rho_0 \frac{x}{S} + \rho \frac{0,5L-x}{S},$$

откуда

$$x = \frac{0,5\rho L - R_A S}{\rho - \rho_0} \approx 80,9 \text{ м.}$$

Ответ: $b = \frac{(R_A + R_B)S - \rho_0 L}{\rho - \rho_0} \approx 51,25 \text{ м, } x = \frac{0,5\rho L - R_A S}{\rho - \rho_0} \approx 80,9 \text{ м.}$

ГЕОЛОГИЯ

Вариант 2

Решения

Задание 1. Задача сводится к нахождению множества решений неравенства $\frac{\lg(7x-6)}{\lg x} \leq 2$. В этом неравенстве множество допустимых значений неизвестного представляет собой объединение промежутков $(\frac{6}{7}, 1) \cup (1, \infty)$. При значениях неизвестного из интервала $(\frac{6}{7}, 1)$ значение $\lg x$ отрицательно, поэтому неравенство задачи эквивалентно условию $\lg(7x-6) \geq 2\lg x$. В силу монотонного возрастания логарифма по десятичному основанию и равенства $2\lg x = \lg x^2$ это условие эквивалентно неравенству $x^2 - 7x + 6 \leq 0$. Множество решений последнего неравенства, именно отрезок $[1, 6]$, не пересекается с интервалом $(\frac{6}{7}, 1)$, поэтому на данном интервале решений нет. Если $x \in (1, \infty)$, то $\lg x > 0$, поэтому неравенство задачи эквивалентно условию $\lg(7x-6) \leq 2\lg x$, откуда $x^2 - 7x + 6 \geq 0$. Следовательно, при $x \in (1, \infty)$ получаем $x \in [6, \infty)$.

Ответ: $x \in [6, \infty)$.

Задание 2.

Зависимость координат камня от времени:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t, \\ y(t) = H + v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Выражая из первого равенства t через x : $t = \frac{x}{v \sin \alpha}$ и подставляя его во второе равенство,

получим уравнение траектории: $y(x) = H + x \operatorname{ctg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha}$. В момент падения на

землю $x = R + d$, $y = 0$. Получаем уравнение для v_0 :

$$0 = H + (R + d) \operatorname{ctg} \alpha - \frac{g(R + d)^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha}. \text{ Отсюда } v_0 = \frac{R + d}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{g}{2[H + (R + d) \operatorname{ctg} \alpha]}}.$$

$$\text{Ответ: } v_0 = \frac{R + d}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{g}{2[H + (R + d) \operatorname{ctg} \alpha]}} = 30\sqrt{30} \approx 164 \text{ (м/с)}.$$

Задание 3. Искомая глубина h находится из уравнения $\frac{4500}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{3h}$, где $150 \leq h \leq 2000$. В данном уравнении левая часть убывает по переменной h , а правая возрастает. Подставляя $h=300$, отсюда заключаем, что это значение является единственным корнем на указанном промежутке.

Ответ: на глубине $h=300$ м.

Задание 4.

На нефть, находящуюся между верхним и нижним основаниями трубы, действуют по вертикали сила тяжести $m\vec{g}$, сила давления \vec{F}_1 со стороны атмосферы и сила давления \vec{F}_2 со стороны нефти, находящейся в пласте. Модули этих сил равны:

$$mg = \rho g S h, F_1 = p_1 S, F_2 = p_2 S,$$

где S – площадь поперечного сечения трубы, p_1 – давление в жидкости у верхнего основания трубы, p_2 – давление в жидкости у нижнего основания трубы. Будем считать, что жидкость движется относительно инерциальной системы отсчета, связанной с Землей, равномерно и прямолинейно. Поэтому сумма сил, приложенных к выделенному объему жидкости, равна 0.

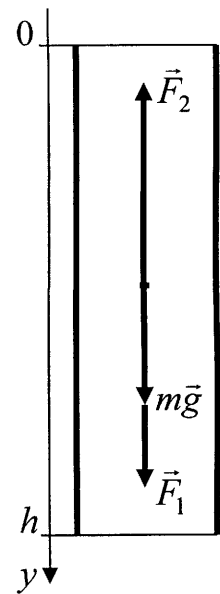
В проекциях на ось y получаем:

$$F_1 - F_2 + mg = p_1 S - p_2 S + \rho g S h = 0,$$

откуда

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h = 6,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Ответ: $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h = 6,8 \cdot 10^6 \text{ Па.}$



Задание 5. Пусть x - величина реальной скорости, тогда условие $|x-300| \leq 25$ означает $275 \leq x \leq 325$, а условие $|x-270| \leq 25$ дает $245 \leq x \leq 295$. Отсюда следует, что $275 \leq x \leq 295$, т.е. $-10 \leq x-285 \leq 10$, или, что то же самое, $|x-285| \leq 10$.

Ответ: 10.

Задание 6.

Вычислим парциальное давление водяного пара при $t_1 = 80^\circ\text{C}$:

$$p_1 = \varphi \cdot p_{\text{н1}} = 0,03 \cdot 47,41 \text{ кПа} \approx 1,422 \text{ кПа.}$$

Роса на стенках полости появится при температуре, при которой данный пар станет насыщенным. Как видно из таблицы, давление p_1 практически равно давлению насыщенного пара при температуре $t_2 = 12^\circ\text{C}$. Однако при понижении температуры давление пара в полости понижается, т.к. по условию задачи объем полости постоянен, а ее стенки непроницаемы для молекул воды. Поэтому при температуре t_2 давление водяного пара равно, в соответствии с законом Шарля,

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 1,422 \text{ кПа} \cdot \frac{285 \text{ К}}{353 \text{ К}} \approx 1,148 \text{ кПа}.$$

Это значение давления равно давлению насыщенного пара при температуре $t_3 = 9^\circ\text{C}$. Изменение температуры $t_3 - t_2 = -3^\circ\text{C}$, что составляет 1% от абсолютной температуры T_2 . Учет этого изменения температуры даст такое же (на 1%) понижение давления, и мы получим при t_3 давление исходного пара $p_3 \approx 1,136 \text{ кПа}$. Пар все еще не будет насыщенным, но насыщение произойдет в долях градуса от t_3 . Поэтому ответ: $t \approx 9^\circ\text{C}$.

Проверка ответа (от участников олимпиады не требуется). Пусть роса выпала на стенках точно при 9°C . Тогда выше этой температуры пар уже ненасыщенный, и к нему применим закон Шарля: $p/T = \text{const}$. Получаем парциальное давление этого пара при $t_1 = 90^\circ\text{C}$:

$$p_9 = p_n(9^\circ\text{C}) \cdot \frac{T_1}{T_3} = 1,148 \text{ кПа} \cdot \frac{353 \text{ К}}{282 \text{ К}} \approx 1,437 \text{ кПа}.$$

Если же роса выпала на стенках точно при $t_4 = 8^\circ\text{C}$, то аналогичным образом получаем при $t_1 = 90^\circ\text{C}$:

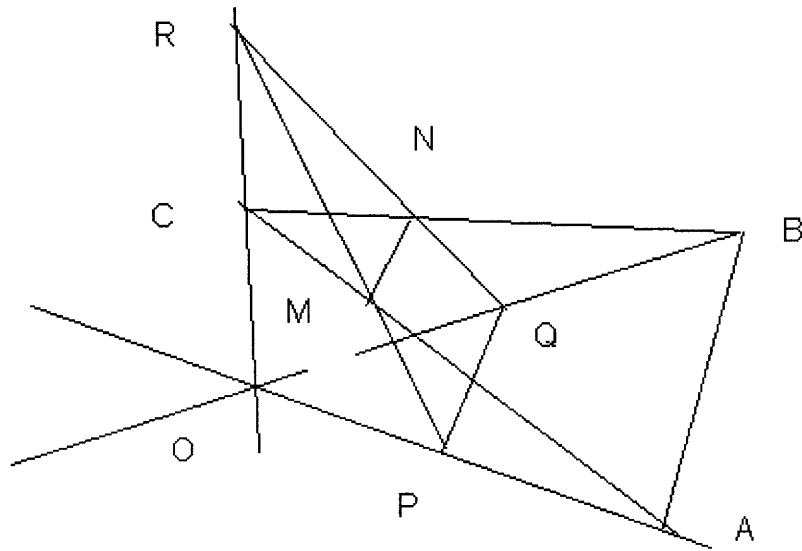
$$p_8 = p_n(8^\circ\text{C}) \cdot \frac{T_1}{T_4} = 1,073 \text{ кПа} \cdot \frac{353 \text{ К}}{281 \text{ К}} \approx 1,348 \text{ кПа}.$$

Давление p_1 находится между этими двумя значениями, ближе к большему.

Задание 7. Сначала рассмотрим плоскость Oxz , на оси z отложим точку L с координатами $(0,0,\frac{1}{2})$. Тогда прямая LP параллельна CM , треугольники CMR и LPR подобны: $RC:RL=2:3$. Следовательно, точка M имеет координаты $(\frac{1}{3},0,\frac{2}{3})$. Отсюда отношение $CM:CA=1:3$. Аналогично отношение $CN:CB=1:3$, треугольник CMN подобен треугольнику CAB : $CM:CA=CN:CB=MN:AB=1:3$. Площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{9}$ площади треугольника CAB , т.е. $\frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}$. Далее, площадь треугольника RCM равна:

$S_{\Delta RCM} = \frac{1}{2} \cdot CR \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, Объем кристалла как многогранника с вершинами C, M, N, O, P и Q (Рис. 1) будем вычислять разность объемов пирамид $ROPQ$ и $NRCM$. Объем пирамиды $NRCM$ равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta RCM} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}$. В то же время объем пирамиды $QROP$ равен $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ROP} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$. Отсюда искомый объем кристалла равен $\frac{1}{12} - \frac{1}{54} = \frac{7}{108}$.

Ответ: площадь треугольника CMN равна $\frac{\sqrt{3}}{18}$, объем кристалла равен $\frac{7}{108}$.



Задание 8.

Сопротивление проводника AB равно

$$R = R_{AC} + R_{CD} + R_{DB} = \rho_0 \frac{x}{S} + \rho \frac{b}{S} + \rho_0 \frac{L-x-b}{S} = \rho_0 \frac{L-b}{S} + \rho \frac{b}{S},$$

где $S = \frac{\pi d^2}{4}$, откуда

$$b = \frac{RS - \rho_0 L}{\rho - \rho_0} \approx 38,2 \text{ м.}$$

Участок CD содержит в себе среднюю точку отрезка AB , т.к. иначе R_A или $R - R_A$ равняется

$$\rho_0 \frac{L}{2S} \approx 217 \text{ Ом.}$$

Поэтому

$$R_A = R_{AC} + R_{CO} = \rho_0 \frac{x}{S} + \rho \frac{0,5L - x}{S},$$

откуда

$$x = \frac{0,5\rho L - R_A S}{\rho - \rho_0} \approx 74,4 \text{ м.}$$

$$\text{Ответ: } b = \frac{RS - \rho_0 L}{\rho - \rho_0} \approx 38,2 \text{ м, } x = \frac{0,5\rho L - R_A S}{\rho - \rho_0} \approx 74,4 \text{ м.}$$