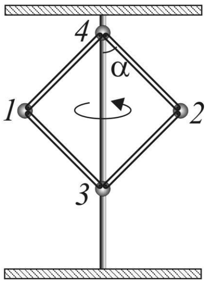
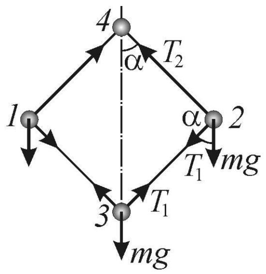
Олимпиада «Ломоносов 2020-2021» по физике

Решения задач для учащихся 10-х –11-х классов

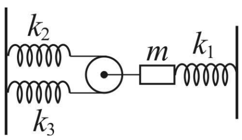


1. Три груза массой m каждый шарнирно соединены невесомыми стержнями длиной $l = 0{,}2$ м (см. рисунок) с закреплённым на вертикальном стержне грузом *4*. Груз *3* может скользить по центральному гладкому стержню без трения. Система была приведена во вращение вокруг вертикали, совпадающей с осью центрального стержня. Какую работу A при этом совершили, если при вращении стержни отклонились на угол $\alpha = 45°$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2, размерами грузов можно пренебречь. Ответ приведите в джоулях, округлив до сотых.

Решение. На рисунке показаны силы, действующие на грузы *2* и *3*. Из рисунка следует, что проекции уравнения движения грузов *2* и *3* на вертикальную координатную ось имеют вид: $T_2\cos\alpha = T_1\cos\alpha + mg$ и $2T_1\cos\alpha = mg$. Проекция уравнения движения груза *2* на горизонтальную координатную ось есть $\dfrac{mv^2}{l\sin\alpha} = T_2\sin\alpha + T_1\sin\alpha$, где v – линейная скорость груза *2*. Из записанных уравнений находим, что $v^2 = 2gl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Следовательно, приращение кинетической энергии системы $\Delta E_к = 2\dfrac{mv^2}{2} = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Приращение её потенциальной энергия $\Delta E_п = 2mgl(1-\cos\alpha) + mg2l(1-\cos\alpha)$. По закону изменения механической энергии искомая работа $A = \Delta E_к + \Delta E_п = 2mgl\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 4mgl(1-\cos\alpha)$. **Ответ:** $A = 2mgl[\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2(1-\cos\alpha)]$.



2. Колебательная система состоит из груза массой m, лежащего на гладкой горизонтальной плоскости, невесомого гладкого блока, двух невесомых, нерастяжимых нитей и трёх невесомых пружин жёсткостью $k_1 = 2/3$ Н/см, $k_2 = 1/2$ Н/см и $k_3 = 1$ Н/см, соответственно, соединённых так, как показано на рисунке. Центр масс груза лежит на одной горизонтали с прикреплённой к нему нитью и осью пружины k_1. В положении равновесия все пружины растянуты. Считая, что нити все время остаются натянутыми, определите круговую частоту ω малых гармонических колебаний груза. Ответ приведите в рад/с, округлив до целых.



Решение. Пусть растяжения пружин в положении равновесия равны l_1, l_2 и l_3, соответственно. Тогда сила натяжения пружины k_1 и правой нити, прикреплённой к грузу, равна $F_1 = k_1l_1$, а сила натяжения нити, переброшенной через блок, равна $F_2 = k_2l_2 = k_3l_3$, т.к. блок гладкий. Из условия невесомости блока следует, что $F_1 = 2F_2$, а потому $l_2 = \dfrac{k_1}{2k_2}l_1$ и $l_3 = \dfrac{k_1}{2k_3}l_1$. При смещении груза вправо на расстояние Δx первая пружина сократится на Δx, а вторая и третья удлинятся на Δx_2 и Δx_3, соответственно, причём $\Delta x_2 + \Delta x_3 = 2\Delta x$ (т.к. нити нерастяжимы) и $k_2\Delta x_2 = k_3\Delta x_3$ (т.к. пружины невесомы). Отсюда находим, что $\Delta x_2 = \dfrac{2k_3}{k_2+k_3}\Delta x$, $\Delta x_3 = \dfrac{2k_2}{k_2+k_3}\Delta x$. Изменение потенциальной системы при этом будет

$$\Delta E_П = \frac{1}{2}\left[k_1(l_1-\Delta x)^2 + k_2(l_2+\Delta x_2)^2 + k_3(l_3+\Delta x_3)^2 - k_1l_1^2 - k_2l_2^2 - k_3l_3^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(-2k_1l_1\Delta x + 2k_2l_2\Delta x_2 + 2k_3l_3\Delta x_3\right) + k_1\Delta x^2 + k_2\Delta x_2^2 + k_3\Delta x_3^2\right].$$

Используя записанные выше соотношения между l_i и Δx_i, нетрудно убедиться в том, что выражение в круглых скобках обращается в нуль. Кроме того, $k_2\Delta x_2^2 = \dfrac{4k_2k_3^2}{(k_2+k_3)^2}\Delta x^2$ и $k_3\Delta x_3^2 = \dfrac{4k_3k_2^2}{(k_2+k_3)^2}\Delta x^2$. Следовательно $\Delta E_\Pi = \dfrac{1}{2}\left(k_1 + \dfrac{4k_2k_3}{k_2+k_3}\right)\Delta x^2$. Обозначив через υ_0 скорость груза в положении равновесия, по закону сохранения механической энергии имеем $\left(k_1 + \dfrac{4k_2k_3}{k_2+k_3}\right)\dfrac{\Delta x^2}{2} = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$. Поскольку амплитудное значение скорости υ_0 связано с амплитудой смещения Δx соотношением $\upsilon_0 = \omega\Delta x$, искомая частота $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left(k_1 + \dfrac{4k_2k_3}{k_2+k_3}\right)}$.

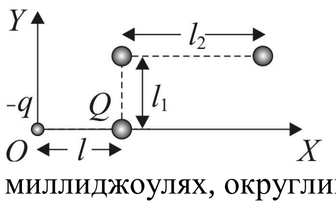
Ответ: $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{m}\left(k_1 + \dfrac{4k_2k_3}{k_2+k_3}\right)}$.

3. В полностью заполненном баллоне объёмом $V_0 = 5$ л помещается $m_0 = 2{,}5$ кг сжиженного пропана (C_3H_8). Если часть пропана из баллона выпустить наружу, то в нем будут находиться в равновесии жидкий пропан и его насыщенный пар. Найдите массу m_1 пропана, находящегося в баллоне в газообразном состоянии, когда из этого баллона выпущено α (%) первоначально находившегося пропана, если температуру пропана поддерживают постоянной и равной $t = 17$ ºC. Давление насыщенных паров пропана при этой температуре $p = 0{,}8$ МПа. Молярная масса пропана $\mu = 44$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в граммах, округлив до целых.

Решение. Плотность жидкого пропана в баллоне $\rho = \dfrac{m_0}{V_0}$, давление в баллоне p. По условию в баллоне всего осталось $m = (1-\alpha_1)m_0$ пропана, где $\alpha_1 = \alpha/100\%$. Пусть часть пропана, которая находится в газообразном состоянии, занимает объем V. Тогда $m_1 = \dfrac{\mu pV}{RT}$ и $(1-\alpha_1)m_0 = \rho(V_0 - V) + \dfrac{\mu pV}{RT}$. Отсюда $V = \dfrac{\alpha_1 m_0 V_0 RT}{m_0RT - \mu pV_0}$. Следовательно, $m_1 = \dfrac{\alpha_1 m_0 V_0 \mu p}{(m_0RT - \mu pV_0)}$.

Ответ: $m_1 = \dfrac{\alpha m_0 V_0 \mu p}{100\%[m_0R(t+273) - \mu pV_0]}$.

4. Две разноименно заряженные частицы находятся на оси OX декартовой системы координат на расстоянии $l = 3$ см друг от друга. Удерживая одну частицу неподвижной, вторую частицу переместили в направлении оси OY на расстояние $l_1 = 4$ см. При этом была совершена работа A_1. Какую работу A_2 понадобится совершить, чтобы после этого передвинуть вторую частицу на расстояние $l_2 = 2$ см в направлении оси OX? Ответ приведите в миллиджоулях, округлив до сотых.

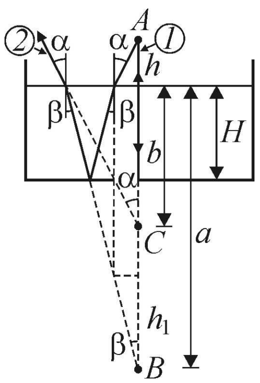


Решение. Потенциальная энергия притяжения зарядов в исходном положении равна $W_0 = -\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 l}$. Когда вторую частицу переместили перпендикулярно линии, соединяющей частицы, на расстояние l_1, потенциальная энергия стала равной $W_1 = -\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{l^2+l_1^2}}$. При этом была совершена работа $A_1 = W_1 - W_0 = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\sqrt{l^2+l_1^2}-l}{l\sqrt{l^2+l_1^2}}$. Потенциальная энергия системы при конечном положении второй частицы $W_2 = -\dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}$. Совершенная при таком перемещении работа $A_2 = W_2 - W_1 = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}-\sqrt{l^2+l_1^2}}{\sqrt{l^2+l_1^2}\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}$. Следовательно, $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{l}{\sqrt{l^2+l_1^2}-l}\left(1-\dfrac{\sqrt{l^2+l_1^2}}{\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}\right)$.

Ответ: $A_2 = \dfrac{A_1 l}{\sqrt{l^2+l_1^2}-l}\left(1-\dfrac{\sqrt{l^2+l_1^2}}{\sqrt{(l+l_2)^2+l_1^2}}\right)$.

5. На горизонтальном дне аквариума лежит плоское зеркало. Человек, наклонившийся над водой и смотрящий вертикально вниз, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии $l = 50$ см. Определите толщину слоя H воды в аквариуме, если глаз расположен на расстоянии $h =$ см от её поверхности. Показатель преломления воды считайте равным $n = 4/3$. Учтите, что для малых значений аргумента φ, заданного в радианах, можно считать, что tg φ ≈ sin φ ≈ φ. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до десятых.

Решение. На рисунке показан ход лучей, дающих изображение C глаза человека A в зеркале. Луч *1* идет от глаза по нормали к зеркалу и после отражения от него возвращается в глаз по тому же пути. Луч *2* идет от глаза под углом α к нормали к поверхности воды и после отражения от зеркала и повторного прохождения сквозь воду также попадает в глаз человека. Продолжения лучей *1* и *2* пересекаются в точке C, являющейся искомым изображением глаза. Согласно закону преломления, $\sin\alpha = n\sin\beta$. Поскольку диаметр зрачка человеческого глаза составляет несколько миллиметров, в глаз попадут только те лучи, которые идут под малыми углами к вертикали, т.е. справедливо приближенное равенство $\alpha \approx n\beta$. Поэтому $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\beta} = \dfrac{\alpha}{\beta} = n$ и $a = 2H + h_1 = 2H + nh$. Из



рисунка видно, что $l = h + b$. Поскольку $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha} = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{1}{n}$, то $b = \dfrac{2H+nh}{n}$. Следовательно, $l = \dfrac{2H}{n} + 2h$, а потому $H = \dfrac{(l-2h)n}{2}$. **Ответ:** $H = \dfrac{(l-2h)n}{2}$.