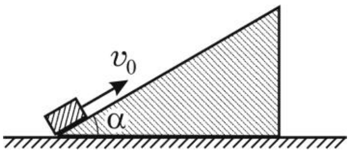
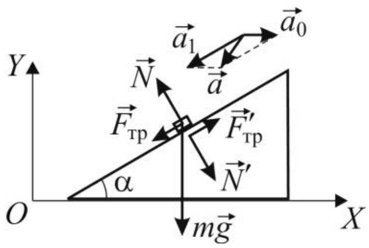
Решения «Ломоносов 2021 – Физика»   Вариант 1.

1.1.1. Задача. Клин массой $M = 1$ кг с углом $\alpha = 30°$ при основании покоится на гладкой горизонтальной поверхности. На клин положили брусок массой $m = 0{,}1$ кг и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх по клину. Найдите, какое количество теплоты Q выделилось в результате трения бруска о клин, если известно, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения, $h = 20$ см. Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина $\mu = 0{,}6$. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.



Вопросы. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

1.1.1. Решение. Брусок и клин движутся под действием сил, изображенных на рисунке. В частности, к бруску приложены: сила тяжести $m\vec{g}$, нормальная составляющая силы реакции клина $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. В свою очередь, брусок действует на клин с силами $\vec{N}'$ и $\vec{F}'_{\text{тр}}$, причем, по третьему закону Ньютона $N' = N$, $F'_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}$. Обозначим через $\vec{a}$ ускорение бруска в неподвижной системе отсчета. В соответствии с законом сложения ускорений, $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1$, где $\vec{a}_0$ – ускорение клина, $\vec{a}_1$ – ускорение бруска относительно клина. Применяя к бруску второй закон Ньютона, имеем $m(\vec{a}_0 + \vec{a}_1) = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$, или, в проекциях на оси координатной системы, изображенной на рисунке, $m(a_0 - a_1\cos\alpha) = -N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha$, $-ma_1\sin\alpha = -mg + N\cos\alpha - F_{\text{тр}}\sin\alpha$. Уравнение движения клина в соответствии со вторым законом Ньютона имеет вид $Ma_0 = N\sin\alpha + F_{\text{тр}}\cos\alpha$. Учитывая, что по закону сухого трения модуль силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$, получаем следующую систему уравнений:



$$ma_1\cos\alpha - ma_0 = N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha,$$
$$ma_1\sin\alpha = mg - N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha,$$
$$Ma_0 = N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha.$$

Решая эту систему, находим модуль силы нормального давления бруска на поверхность клина:

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1 + m(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha)/M}.$$

Модуль суммарной работы сил $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{F}'_{\text{тр}}$ равен произведению модуля силы трения скольжения на модуль перемещения бруска относительно клина: $|A_{\text{тр}}| = \mu Nh/\sin\alpha$. Учитывая, что по закону сохранения энергии количество теплоты, выделившееся при скольжении бруска по клину, $Q = |A_{\text{тр}}|$, получаем, что $Q = \dfrac{\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1 + m(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha)/M}$.

Ответ: $Q = \dfrac{\mu mgh\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{1 + m(\sin^2\alpha + \mu\sin\alpha\cos\alpha)/M} \approx 0{,}2$ Дж.

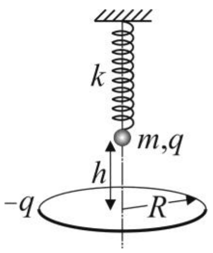
2.6.1. Задача. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде с площадью сечения

$S = 20$ см^2 под поршнем массой $M = 4$ кг содержится идеальный одноатомный газ. Расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 1$ м. Газу сообщили количество теплоты $\Delta Q = 126$ Дж. Во сколько раз α изменится среднеквадратичная скорость молекул газа? Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Трение поршня о стенки сосуда считайте пренебрежимо малым.

Вопросы. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы? Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

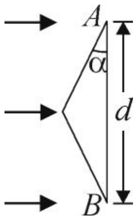
2.6.1. Решение. Среднеквадратичная скорость молекул газа определяется выражением $v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, m_0 – масса молекулы. Следовательно, искомое отношение равно $\alpha = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}}$, где T_2 и T_1 – температуры газа в конечном и начальном состояниях. Из уравнения начального состояния газа $\left(p_0 + \dfrac{Mg}{S}\right)hS = \nu RT_1$ находим число молей газа $\nu = \dfrac{(p_0 S + Mg)h}{RT_1}$. При нагреве газ совершает изобарное расширение, поэтому $\Delta Q = \dfrac{5}{2}\nu R(T_2 - T_1)$. Подставляя сюда найденное выше ν, приходим к соотношению: $\Delta Q = \dfrac{5}{2}(p_0 S + Mg)h\left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)$. **Ответ:** $\alpha = \sqrt{1 + \dfrac{2\Delta Q}{5(p_0 S + Mg)h}} = 1{,}1$.

3.5.1. Задача. Над закреплённым проволочным кольцом радиуса R, расположенным горизонтально, на пружине подвешена маленькая заряженная бусинка (см. рисунок). Заряд бусинки $q = 1$ мкКл равен по модулю и противоположен по знаку заряду кольца. Бусинка располагается точно над центром кольца на высоте $h = R = 20$ см Определите максимальную скорость $v_{\max}$ бусинки в процессе её малых свободных колебаний, которые возникают после мгновенной нейтрализации заряда кольца. Масса бусинки $m = 9$ г, жёсткость пружины $k = 10$ Н/м. Электрическую постоянную примите равной $\varepsilon_0 = 9\cdot 10^{-12}$ Ф/м. *Указание: для упрощения записи ответа в общем виде используйте равенство $h = R$.*



Вопросы. Какие колебания называют гармоническими? Что такое амплитуда и фаза гармонических колебаний?

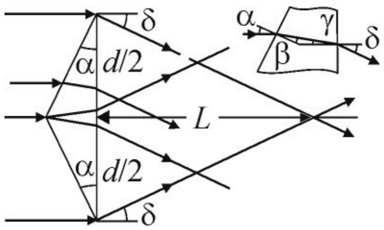
3.5.1. Решение. До нейтрализации заряда кольца пружина растянута под действием силы тяжести mg и силы электростатического притяжения со стороны равномерно заряженного кольца $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2 h}{(R^2 + h^2)^{3/2}}$. С учётом равенства h и R последнюю запись легко упростить: $F_e = \dfrac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{R^2}$. После нейтрализации заряда кольца положение равновесия бусинки скачком изменится на новое, находящееся на расстоянии $\Delta x = \dfrac{F_e}{k}$ от первоначального. В результате возникнут гармонические колебания бусинки с амплитудой $A = \Delta x = \dfrac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{kR^2}$ и циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Максимальное (амплитудное) значение скорости движения бусинки равно при этом $v_{\max} = A\cdot\omega_0 = \dfrac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{kR^2}\cdot\sqrt{\dfrac{k}{m}}$. **Ответ:** $v_{\max} = \dfrac{1}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{\sqrt{mk}R^2} \approx 0{,}26$ м/с.



4.3.1. Задача. На равнобедренную стеклянную призму падает широкий параллельный пучок света, перпендикулярный грани *AB*, ширина которой $d = 5$ см. На каком расстоянии L от грани *AB* преломленный призмой свет разделится на два не перекрывающихся пучка? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$, угол при основании призмы $\alpha = 0{,}1$ рад. При расчетах учтите, что для малых углов, заданных в радианах, $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

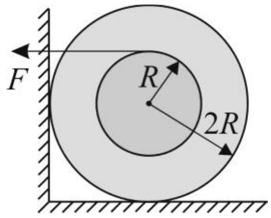
Вопросы. Сформулируйте закон отражения света. Приведите пример построения изображения предмета в плоском зеркале.

4.3.1. Решение. Каждый из лучей света, падающих на призму, преломляется дважды: на передней и задней ее гранях (см. рисунок). Закон преломления на этих гранях, записанный с учетом малости углов падения и преломления, дает следующие соотношения: $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$, $\delta = n\gamma$. Поскольку $\gamma = \alpha - \beta$, получаем для угла преломления δ значение $\delta = \alpha(n-1)$. Из рисунка видно, что пучки света, преломленные призмой, перестанут перекрываться на расстоянии L, удовлетворяющем условию: $L = \dfrac{d}{2\operatorname{tg}\delta} \approx \dfrac{d}{2\delta}$. Объединяя записанные выражения, находим, что $L = \dfrac{d}{2\alpha(n-1)}$. **Ответ:** $L = \dfrac{d}{2\alpha(n-1)} \approx 50$ см.



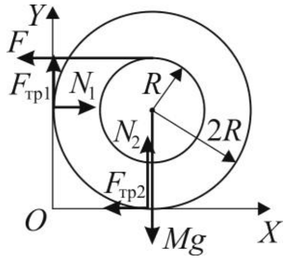
Решения «Ломоносов 2021 – Физика»   Вариант 2.

1.10.2. Задача. Катушку массой $M = 720$ г и радиусом внутреннего цилиндра R, имеющую внешний радиус $2R$, положили на горизонтальный пол и прислонили к вертикальной стене, как показано на рисунке. На внутренний цилиндр катушки намотали лёгкую нить. Определите, при каком минимальном значении модуля F силы, приложенной к нити и направленной горизонтально влево, катушка начнёт вращаться. Коэффициенты трения скольжения катушки о пол и стену одинаковы и равны $\mu = 0{,}2$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.

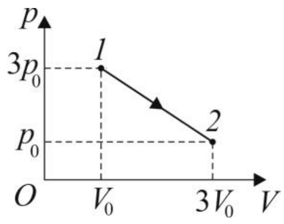


Вопросы. Чему равны сила трения покоя и сила трения скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

1.10.2. Решение. Катушка находится в равновесии под действием сил, модули и направления которых показаны на рисунке. Здесь N_1 и $F_{\text{тр}1}$ действуют на катушку со стороны стены, N_2 и $F_{\text{тр}2}$ − со стороны пола, Mg − со стороны Земли и F − со стороны нити. Поскольку ускорение катушки должно оставаться равным нулю, то сумма моментов и действующих на катушку сил должны быть равны нулю. По закону сухого трения: $F_{\text{тр}1} = \mu \cdot N_1$, $F_{\text{тр}2} = \mu \cdot N_2$. Имеем следующую систему уравнений: $N_1 - \mu N_2 - F = 0$, $Mg - N_2 - \mu N_1 = 0$ и $FR = 2\mu R\left(N_1 + N_2\right)$. Из первых двух уравнений следует, что $N_1 = \dfrac{\mu Mg + F}{1+\mu^2}$ и $N_2 = \dfrac{Mg - \mu F}{1+\mu^2}$.



Подставляя эти значения в третье уравнение, получаем: $F = 2\mu\left(\dfrac{\mu Mg + F}{1+\mu^2} + \dfrac{Mg - \mu F}{1+\mu^2}\right)$, откуда $F = \dfrac{2Mg\mu(1+\mu)}{1-2\mu+3\mu^2}$. **Ответ:** $F = \dfrac{2Mg\mu(1+\mu)}{1-2\mu+3\mu^2} = 4{,}8$ Н.



2.4.1. Задача. При расширении некоторого количества аргона его давление уменьшается так, как показано на p–V-диаграмме (см. рисунок). Определите максимальное значение $U_{\max}$ внутренней энергии газа в процессе $1 - 2$. Начальные значения объёма и давления газа равны $V_0 = 0{,}1$ м^3 и $p_0 = 5 \cdot 10^4$ Па соответственно.

Вопросы. Что такое внутренняя энергия термодинамической системы? Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

2.4.1. Решение. Зависимость давления от объема в процессе $1 - 2$ описывается линейной функцией вида $p(V) = b - kV$. По условию $p(V_0) = 3p_0$, $p(3V_0) = p_0$, или $3p_0 = b - kV_0$, $p_0 = b - 3kV_0$. Из этой системы находим, что $b = 4V_0$, $k = \dfrac{p_0}{V_0}$. Следовательно, $p = 4p_0 - \dfrac{p_0}{V_0}V$. Для аргона, который можно считать одноатомным идеальным газом, $U = \dfrac{3}{2}pV$ и зависимость внутренней энергии от объема имеет вид $U = \dfrac{3}{2}(4p_0V - \dfrac{p_0}{V_0}V^2)$.

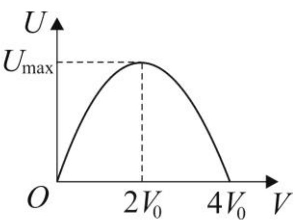
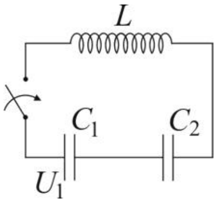


График зависимости $U(V)$ изображен на рисунке, причем он пересекает ось абсцисс в точках $V = 0$ и $V = 4V_0$. Поэтому максимум внутренней энергии достигается при объёме аргона $V = 2V_0$. Максимальное значение U равно $U_{\max} = \frac{3}{2}\cdot 4p_0V_0$. **Ответ:** $U_{\max} = 6p_0V_0 = 30$ кДж.

3.6.2. Задача. В цепи, показанной на рисунке, конденсатор емкостью $C_1 = 10^{-5}$ Ф вначале заряжен до некоторого напряжения U_1, а конденсатор емкостью $C_2 = 10^{-6}$ Ф разряжен. Известно, что в процессе колебаний, возникающих в цепи после замыкания ключа, амплитуда напряжения на конденсаторе C_2 оказалась равной $U_{2\max} = 364$ В. До какого напряжения U_1 был заряжен конденсатор C_1 первоначально? Потерями в соединительных проводах и в катушке индуктивности можно пренебречь.



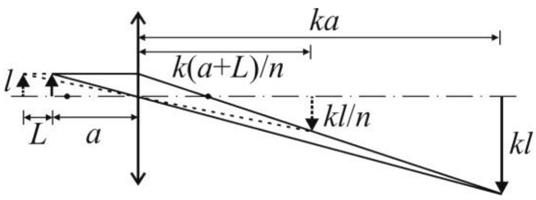
Вопросы. В чем состоит явление самоиндукции? Дайте определение индуктивности контура.

3.6.2. Решение. После замыкания ключа в цепи возникают гармонические колебания, в процессе которых происходит периодическая перезарядка конденсаторов. В каждый момент времени суммарное напряжение на конденсаторах равно напряжению на катушке, которое, в свою очередь, опережает по фазе ток в цепи на $\pi/2$. В момент достижения максимального напряжения на конденсаторах ток в цепи обратится в нуль, следовательно, вся энергия будет сосредоточена в конденсаторах. При этом на конденсатор C_2 перетечет из конденсатора C_1 некоторый заряд q, а на конденсаторе C_1 останется заряд $C_1U_1 - q$. Величину заряда q на конденсаторе C_2 можно найти из закона сохранения энергии в контуре. Поскольку в рассматриваемый момент времени магнитная энергия обращается в нуль, справедливо равенство: $\frac{1}{2}C_1U_1^2 = \frac{(C_1U_1 - q)^2}{2C_1} + \frac{q^2}{2C_2}$. Отсюда $q = 2U_1\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$. Учитывая, что $U_2 = \frac{q}{C_2}$, получаем, что $U_{2\max} = \frac{2U_1C_1}{C_1 + C_2}$. Отсюда $U_1 = \frac{(C_1 + C_2)U_{2\max}}{2C_1}$. **Ответ:** $U_1 = \frac{(C_1 + C_2)U_{2\max}}{2C_1} \approx 200$ В.

4.10.1. Задача. С помощью тонкой собирающей линзы получили увеличенное в $k = 5$ раз действительное изображение предмета, расположенного вблизи главной оптической оси линзы. Если расстояние между линзой и предметом увеличить на $L = 1$ см, то изображение предмета станет меньше в $n = 2$ раза. Определите фокусное расстояние линзы F.

Вопросы. Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое линзой?

4.10.1. Решение. Построение изображений предмета при двух его положениях показано на рисунке. Из формулы тонкой линзы следуют равенства: $\frac{1}{a} + \frac{1}{ka} = \frac{1}{F}$ и $\frac{1}{a+L} + \frac{n}{k(a+L)} = \frac{1}{F}$. Исключая из этих равенств a, находим, что $F = \frac{kL}{n-1}$.



Ответ: $F = \frac{kL}{n-1} = 5$ см.