Олимпиада «Ломоносов 2016 – 2017» по физике
Отборочный этап, второй тур
Решения задач для 10-х – 11-х классов

Тест. Из известного кинематического соотношения $\frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = h$ находим, что $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$.

Ответ: $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2gh}$.

1. Масса планеты $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Из уравнения движения тела массой m по круговой орбите радиуса R, а именно $\frac{mv_{1к}^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}$, следует, что первая космическая скорость $v_{1к} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$.

Ответ: $v_{1к} = 2R\sqrt{\frac{G\pi\rho}{3}}$.

2. Поскольку массы шайб одинаковы, из законов сохранения импульса и механической энергии следуют выражения: $\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, $\vec{v}_0^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2$. Возведя в квадрат первое соотношение и сравнивая его со вторым, получаем, что скалярное произведение $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$. Поэтому угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ прямой; следовательно, расстояние между шайбами после удара $L = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, где l_1 и l_2 – расстояния, пройденные первой и второй шайбами после столкновения. Кинетическая энергия первой шайбы расходуется на работу против сил трения: $\frac{mv_0^2}{2} = \mu mg(l_1 + l_2)$. Отсюда получаем, что $l_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g} - l_1$. В итоге приходим к искомой величине $L = \sqrt{l_1^2 + \left(\frac{v_0^2}{2\mu g} - l_1\right)^2}$.

Ответ: $L = l_1\sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{2\mu g l_1} - 1\right)^2}$.

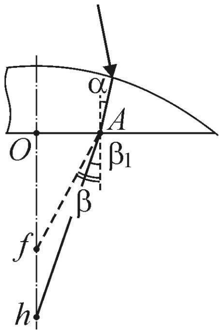
3. Запишем уравнение теплового баланса для первого переливания воды из горячего сосуда в холодный: $cm(t_3 - t_1) = c\Delta m(t_2 - t_3)$, где t_3 – установившаяся температура воды в первом сосуде, c – удельная теплоёмкость воды. Следовательно, $t_3 = \frac{mt_1 + \Delta m t_2}{m + \Delta m} = \frac{nt_2 + t_1}{n+1}$, где $n = \frac{\Delta m}{m}$. Запишем уравнение теплового баланса для переливания воды обратно, и найдём t_4 – температуру воды во втором сосуде после перемешивания. Имеем $c(m - \Delta m)(t_2 - t_4) = c\Delta m(t_4 - t_3)$, откуда $t_4 = \frac{(m - \Delta m)t_2 + \Delta m t_3}{m} = nt_3 + (1-n)t_2 = \frac{nt_1 + t_2}{n+1}$. После первого переливания воды «туда–обратно» разность температур в сосудах будет равна $\Delta t_1 = t_4 - t_3 = (t_2 - t_1)\frac{1-n}{1+n}$. Аналогично, после второго переливания разность температур в сосудах станет равной:

$\Delta t_2 = t_6 - t_5 = (t_4 - t_3)\dfrac{1-n}{1+n} = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^2$. После трех таких переливаний разность температур $\Delta t = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^3 = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{m-\Delta m}{m+\Delta m}\right)^3$. **Ответ:** $\Delta t = (t_2 - t_1)\left(\dfrac{m-\Delta m}{m+\Delta m}\right)^3$.

4. Пусть площадь обкладки конденсатора равна S, а расстояние между обкладками равно d. Емкость такого конденсатора $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$, где ε_0 –электрическая постоянная. Поэтому заряд конденсатора без пластины равен $q_0 = C_0 U = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}U$, где U – напряжение источника. Конденсатор с вставленной пластиной эквивалентен двум параллельно соединённым конденсаторам с ёмкостями $C_1 = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{dn}$ и $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 S(n-1)}{dn}$. Поэтому его ёмкость равна $C = C_1 + C_2 = \dfrac{2\varepsilon_0 S}{dn} + \dfrac{\varepsilon_0 S(n-1)}{dn} = \dfrac{\varepsilon_0 S(n+1)}{dn}$, а заряд равен $q = CU = \dfrac{\varepsilon_0 S(n+1)}{dn}U$. Следовательно, искомое отношение $k = \dfrac{q}{q_0} = \dfrac{n+1}{n}$.

Ответ: $k = \dfrac{n+1}{n}$.

5. Пусть α – угол падения на плоскую поверхность линзы одного из лучей, испытавших преломление на ее выпуклой поверхности, β – угол преломления этого луча на границе "стекло – воздух", а β_1 – угол преломления этого луча на границе "стекло – вода" (см. рисунок). По закону преломления, учитывая малость углов α, β и β_1, имеем: $n_{\text{ст}}\alpha = \beta$, $n_{\text{ст}}\alpha = n\beta_1$, где $n_{\text{ст}}$ – показатель преломления стекла. Отсюда $\dfrac{\beta}{\beta_1} = n$. Из рисунка видно, что $\mathrm{tg}\,\beta \approx \beta \approx \dfrac{OA}{Of}$, $\mathrm{tg}\,\beta_1 \approx \beta_1 \approx \dfrac{OA}{Oh}$. Отсюда $Oh = Of\,\dfrac{\beta}{\beta_1}$.



Следовательно, расстояние h от линзы до изображения в воде связано с расстоянием f от линзы до изображения в воздухе соотношением $h = nf$. Из формулы линзы следует, что $f = \dfrac{F \cdot d}{d-F}$. **Ответ:** $h = \dfrac{n \cdot F \cdot d}{d-F}$.