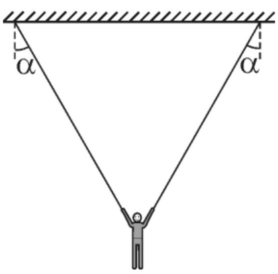
Третий тур

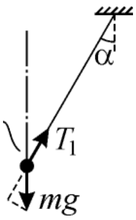
1. Две планеты движутся по круговым орбитам вокруг массивной звезды. Радиус орбиты второй планеты больше радиуса орбиты первой планеты в $k = 4$ раза. Найдите период обращения второй планеты, если известно, что период обращения первой планеты $T_1 = 100$ суток. Гравитационным взаимодействием между планетами можно пренебречь. Ответ приведите в сутках, округлив до целых.

1 Решение. По второму закону Ньютона, используя выражение для центростремительного ускорения и силы всемирного тяготения, имеем $m \cdot \dfrac{v^2}{R} = G\dfrac{m \cdot M}{R^2}$. Период обращения по круговой орбите равен $T = \dfrac{2\pi R}{v}$. Таким образом, $\left(\dfrac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^3$, как это и следует из третьего закона Кеплера. Отсюда получаем, что $T_2 = T_1 \cdot \left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)^{3/2}$. **Ответ:** $T_2 = T_1 \cdot k^{3/2} = 800$ суток.



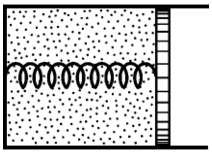
2. Перед выполнением упражнения гимнаст массой 60 кг висит неподвижно, держась за два кольца. При этом канаты, на которых подвешены кольца, образуют с вертикалью одинаковые углы $\alpha = 30°$. На какую величину ΔF увеличится нагрузка на правую руку гимнаста в тот момент, когда он резко отпустит левое кольцо? Размером тела гимнаста по сравнению с длиной канатов можно пренебречь. Канаты считайте невесомыми и нерастяжимыми. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до целых.

2. Решение. В начальном положении сумма сил, действующих на гимнаста, равна нулю. Отсюда



$mg = 2T\cos\alpha$, где m – масса гимнаста, g – ускорение свободного падения, T – сила натяжения каната, равная нагрузке на каждую руку спортсмена. В момент, когда гимнаст отпускает левое кольцо, нагрузка на его правую руку выражается формулой $T_1 = mg\cos\alpha$. Это уравнение выражает тот факт, что ускорение спортсмена в направлении каната, а также сумма сил, действующих на него в этом направлении, равны нулю. Отсюда $\Delta F = T_1 - T = mg\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2\cos\alpha}\right) = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}} \approx 173$ Н.

Ответ: $\Delta F = mg\left(\cos\alpha - \dfrac{1}{2\cos\alpha}\right) = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}} \approx 173$ Н.

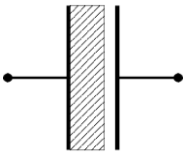


3. В цилиндрическом сосуде, расположенном горизонтально, находится смесь газов, стоящая из $\upsilon_1 = 0{,}5$ моль азота и $\upsilon_2 = 0{,}5$ моль аргона при температуре $T_1 = 300$ К. Гладкий подвижный поршень связан с дном сосуда пружиной. Расстояние от поршня до дна цилиндра $h = 0{,}5$ м. После нагрева смеси газов до температуры $T_2 = 420$ К поршень сдвинулся на $\Delta h = 0{,}1$ м. Каков коэффициент жесткости пружины k? Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К). Ответ приведите в килоньютонах на метр, округлив до одного знака после запятой.

3. Решение. В исходном состоянии смеси газов условие равновесия поршня имеет вид $p_0 S + k\,\Delta x_1 = p_1 S$. Здесь S –площадь поршня, Δx_1 – начальное растяжение пружины, p_0 – атмосферное давление, p_1 – начальное давление газа. После нагрева смеси газов условие равновесия поршня примет вид: $p_0 S + k\,\Delta x_2 = p_2 S$. Здесь Δx_2 – растяжение пружины, а p_2 – давление смеси газов после нагрева. Вычитая из второго уравнения первое, получаем: $p_2 - p_1 = \dfrac{k}{S}(\Delta x_2 - \Delta x_1) = \dfrac{k}{S}\Delta h$. С другой стороны, из уравнения Менделеева–Клапейрона, записанного для начального и конечного состояний смеси газов: $p_1 h S = (\nu_1 + \nu_2) R T_1$, $p_2 (h + \Delta h) S = (\nu_1 + \nu_2) R T_2$, вытекает, что $p_2 - p_1 = \dfrac{(\nu_1+\nu_2)R}{S}\left(\dfrac{T_2}{h+\Delta h} - \dfrac{T_1}{h}\right)$. Приравнивая разности давлений смеси, найденные этими способами, получаем, что $k = \dfrac{(\nu_1+\nu_2)R\left[T_2 - T_1(1 + \Delta h / h)\right]}{\Delta h (h + \Delta h)}$.

Ответ: $k = \dfrac{(\nu_1+\nu_2)R\left[T_2 - T_1(1 + \Delta h / h)\right]}{\Delta h (h + \Delta h)}$ = 8,3 кН/м.

4. Расстояние между пластинами плоского воздушного конденсатора $d = 2$ см. Пространство



между пластинами частично заполнено диэлектриком, как показано на рисунке. Толщина слоя диэлектрика $d_1 = 1{,}5$ см. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon = 5$. Найдите напряженность E электрического поля в воздушном зазоре, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 3{,}2$ В. Ответ округлите до целых.

4. Решение. По определению диэлектрической проницаемости, напряженность поля в диэлектрике равна $\dfrac{E}{\varepsilon}$. Учитывая связь между разностью потенциалов и напряженностью однородного поля, получаем, что $U = E(d - d_1) + \dfrac{E}{\varepsilon} d_1$. Отсюда $E = \dfrac{\varepsilon U}{\varepsilon(d - d_1) + d_1}$. **Ответ:** $E = \dfrac{\varepsilon U}{\varepsilon(d - d_1) + d_1} = 400$ В/м.

5. Объектив проекционного аппарата находится на расстоянии $f = 4{,}0$ м от экрана. При этом резкое изображение диапозитива занимает $k = 0{,}25$ площади экрана. Для того чтобы резкое изображение заняло весь экран, проекционный аппарат пришлось дополнительно отодвинуть от экрана так, что его объектив переместился от своего первоначального положения на $l = 3{,}9$ м. Найдите фокусное расстояние F объектива проекционного аппарата, считая, что он является тонкой линзой, а диапозитив неподвижен относительно корпуса аппарата. Отношение сторон прямоугольного экрана совпадает с отношением сторон диапозитива. Ответ приведите в сантиметрах, округлив до целых.

5. Решение. Обозначим через d_1 и d_2 расстояния от диапозитива до объектива проектора в первом и во втором случаях. Увеличения изображения диапозитива в первом и во втором случаях равны соответственно $\Gamma_1 = \dfrac{f}{d_1}$, $\Gamma_2 = \dfrac{f+l}{d_2}$, причем по условию $\dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \sqrt{k}$. Используя формулу линзы для двух положений проектора, а также записанные выше выражения, получаем систему уравнений:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f+l} = \frac{1}{F}, \quad \frac{f}{d_1} = \sqrt{k}\,\frac{f+l}{d_2}.$$

Исключая из этих уравнений d_1 и d_2, находим $F = \dfrac{f(1-\sqrt{k}) - l\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}$.

Ответ: $F = \dfrac{f(1-\sqrt{k}) - l\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}$ = 10 см.

6. Для полива садового участка используется подсоединенная к водопроводу короткая тонкая труба, установленная у поверхности земли под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В некоторый момент времени садовод начал плавно открывать кран, подающий воду в трубу, в результате чего скорость v струи, вытекающей из трубы, стала возрастать со временем t по закону $v = kt$, где $k = 2$ м/с^2. Найдите ускорение a, с которым двигалась по горизонтальной поверхности земли точка падения водяной струи. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

6. Решение. Рассмотрим частицу струи, вылетевшую из трубы в момент времени t и имеющую скорость $v = kt$. Длительность полета этой частицы $\tau = \beta t$, ее приземление происходит в момент времени $T = t + \tau = (1+\beta)t$, где для краткости введено обозначение $\beta = \dfrac{2k\sin\alpha}{g}$. Координата точки падения выделенной частицы $x = \dfrac{(kt)^2}{g}\sin 2\alpha$. Искомое ускорение $a = \dfrac{d^2x}{dT^2} = \dfrac{1}{(1+\beta)^2}\dfrac{d^2x}{dt^2}$. Из записанных выражений следует, что $a = \dfrac{2g\,k^2\sin 2\alpha}{(g+2k\sin\alpha)^2} \approx 0{,}48$ м/с^2.

Ответ. $a = \dfrac{2g\,k^2\sin 2\alpha}{(g+2k\sin\alpha)^2} \approx 0{,}48$ м/с^2.