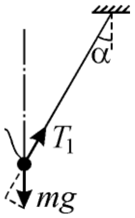
Второй тур

1. С поверхности земли подброшен вертикально вверх небольшой шарик с начальной скоростью v_0 = 5 м/с. В тот момент, когда он достиг верхней точки, снизу, с того же места подброшен точно такой же шарик с такой же начальной скоростью. При столкновении шарики слипаются и движутся далее как одно целое. Определите промежуток времени t, в течение которого первый шарик находился в полёте до соприкосновения с поверхностью земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным g = 10 м/с^2. Ответ округлите до одного знака после запятой.

1. Решение. Выберем систему отсчета с началом на поверхности земли и координатной осью OY, направленной вертикально вверх. Уравнения движения шариков имеют вид: $y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, $y_2(t) = v_0(t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}$, где $t_0 = \frac{v_0}{g}$ – время подъема первого шарика до верхней точки. Из равенства $y_1(t_1) = y_2(t_1)$ находим, что промежуток времени t_1 от момента подбрасывания первого шарика до столкновения шариков $t_1 = \frac{3}{2}\frac{v_0}{g}$, а высота h, на которой произойдет столкновение, $h = \frac{3}{8}\frac{v_0^2}{g}$. Непосредственно перед столкновением скорости каждого из шариков по величине равны $v = \frac{v_0}{2}$, но направлены в противоположные стороны. По закону сохранения импульса сразу после столкновения скорость слипшихся шариков равна нулю. Время их свободного падения на землю с высоты h равно $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{2g}\sqrt{3}$. Общее время полёта первого шарика (т.е. искомый промежуток времени) $t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2g}(3+\sqrt{3}) \approx 1{,}2$ с. **Ответ:** $t = \frac{v_0}{2g}(3+\sqrt{3}) \approx 1{,}2$ с.

2. При испытании парашютной системы груз подвесили на двух одинаковых стропах так, что стропы составили с вертикалью одинаковые углы. При этом натяжение каждой стропы составило величину $T = 1000$ Н. Затем одну из строп перерезали. В этот момент сила натяжения другой стропы возросла до величины $T_1 = 1200$ Н. Пренебрегая размерами груза, определите его массу m. Стропы считайте невесомыми и нерастяжимыми. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Ответ округлите до целых.

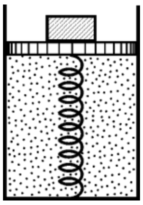
2. Решение. Условие равновесия груза, подвешенного на двух стропах, имеет вид $mg = 2T\cos\alpha$,



где α – угол, который составляет стропа с вертикалью. В момент, когда одну из строп перерезают, ускорение груза в проекции на направление второй стропы равно нулю. Отсюда $T_1 = mg\cos\alpha$. Решая эту систему уравнений, находим $m = \frac{1}{g}\sqrt{2TT_1} \approx 155$ кг.

Ответ: $m = \frac{1}{g}\sqrt{2TT_1} \approx 155$ кг.

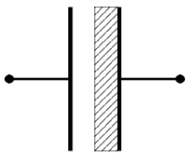
3. Один моль кислорода находится в гладком вертикальном цилиндре под поршнем с грузом.



Поршень связан с дном цилиндра пружиной, коэффициент упругости которой $k = 10^4$ Н/м. Расстояние от поршня до дна цилиндра $h_1 = 0{,}3$ м. После нагрева кислорода до температуры $T_2 = 450$ К расстояние от поршня до дна цилиндра стало равным $h_2 = 0{,}4$ м. Какой была температура кислорода T_1 перед его нагревом? Универсальную газовую постоянную примите равной $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Ответ приведите по шкале Кельвина, округлив его до целых.

3. Решение. В исходном состоянии условие равновесия поршня имеет вид: $Mg + p_0S + k\Delta x_1 = p_1S$. Здесь M – масса поршня с грузом, S – площадь поршня, Δx_1 – начальное растяжение пружины, p_0 – атмосферное давление, p_1 – начальное давление кислорода под поршнем. После нагрева кислорода условие равновесия поршня примет вид: $Mg + p_0S + k\Delta x_2 = p_2S$. Здесь Δx_2 – конечное растяжение пружины, p_2 – конечное давление под поршнем. Из уравнения состояния кислорода следует, что $p_1V_1 = RT_1$, $p_2V_2 = RT_2$, откуда $p_2 - p_1 = R\left(\frac{T_2}{V_2} - \frac{T_1}{V_1}\right)$. С другой стороны $p_2 - p_1 = \frac{k(h_2 - h_1)}{S}$. Из записанных выражений получаем, что $T_1 = T_2\frac{h_1}{h_2} - \frac{kh_1(h_2 - h_1)}{R} \approx 301$ К.

Ответ: $T_1 = T_2\frac{h_1}{h_2} - \frac{kh_1(h_2 - h_1)}{R} \approx 301$ К.



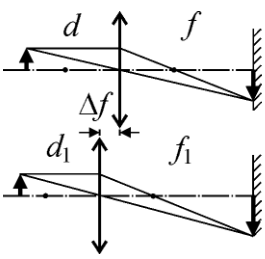
4. Пространство между обкладками плоского конденсатора наполовину заполнено диэлектриком, как показано на рисунке. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика $\varepsilon = 7$. Найдите разность потенциалов между обкладками конденсатора, если напряженность электрического поля в диэлектрике $E = 500$ В/м. Расстояние между обкладками d = 1 см. Ответ округлите до целых.

4. Решение. Обозначим через E_1 напряженность поля в воздушном зазоре конденсатора. По определению диэлектрической проницаемости $E = \frac{E_1}{\varepsilon}$ (диэлектрическая проницаемость воздуха

≈ 1). Учитывая связь между напряженностью поля и разностью потенциалов, получаем $U = E_1\dfrac{d}{2} + E\dfrac{d}{2} = E\dfrac{d}{2}(\varepsilon + 1)$. **Ответ:** $U = E\dfrac{d}{2}(\varepsilon + 1) = 20$ В.

5. Объектив проекционного аппарата находится на расстоянии f = 10 м от экрана, ширина которого 3 м, а высота 2 м. На экране получено четкое изображение диапозитива, занимающее половину площади экрана, причем центр изображения совпадает с центром экрана. На какое расстояние Δf и в какую сторону следует переместить проекционный аппарат, чтобы четкое изображение диапозитива заняло всю площадь экрана? Размеры диапозитива 24×36 мм. Объектив проекционного аппарата считайте тонкой линзой. Ответ округлите до целых. Поставьте перед полученным числом знак «+», если проектор нужно удалить от экрана, или знак «–», если проектор нужно приблизить к экрану.

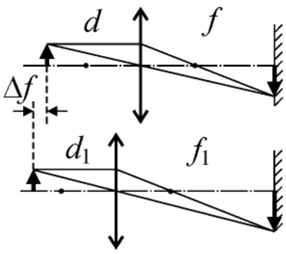
5. Решение. Условие задачи допускает два равноценных подхода к решению. *В первом подходе*



естественно предположить, что объектив неподвижен относительно проекционного аппарата и перемещается вместе с ним, а формирование резкого изображения на экране достигается путем изменения расстояния от диапозитива до объектива. Как известно, линейное увеличение Γ, даваемое линзой, может быть рассчитано по формуле $\Gamma = \dfrac{f}{d}$, где d – расстояние от диапозитива до линзы (объектива), а f – расстояние от линзы до экрана. Из формулы тонкой линзы следует, что оптическая сила линзы $D = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f}(\Gamma + 1)$. Оптическая сила остается неизменной, но изменяется расстояние между линзой и экраном. Поэтому справедливо равенство $\dfrac{1}{f}(\Gamma_0 + 1) = \dfrac{1}{f_1}(\Gamma + 1)$. Отсюда $\Delta f = f_1 - f = f\,\dfrac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0 + 1}$. Учитывая, что конечное увеличение $\Gamma = \dfrac{2000}{24} = \dfrac{3000}{36} \approx 83{,}3$, а начальное $\Gamma_0 = \dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$, находим, что $\Delta f \approx 4$ м, причем проектор следует удалить от экрана. Поскольку $\Gamma, \Gamma_0 >> 1$, выражение для Δf можно упростить и привести к виду $\Delta f \approx f\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Ответ: $\Delta f = +f\,\dfrac{\Gamma - \Gamma_0}{\Gamma_0 + 1} \approx f\left(\sqrt{2} - 1\right) \approx +4$ м, где $\Gamma = \dfrac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

В рамках *второго подхода* можно считать, что диапозитив жестко связан с проектором и перемещается вместе с ним, а фокусировка изображения на экран осуществляется за счет



изменения расстояния между объективом и диапозитивом. Пусть d – первоначальное расстояние от диапозитива до объектива, а f – первоначальное расстояние от объектива до экрана, d_1 и f_1 – те же расстояния после перемещения диапозитива вместе с аппаратом (см. рисунок). По формуле линзы имеем $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{f} = D$, $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1} = D$, где D – оптическая сила объектива диапроектора. Искомое смещение аппарата вместе с диапозитивом

$\Delta f = d_1 + f_1 - (d+f)$. Увеличение, даваемое объективом несмещенного аппарата, $\Gamma_0 = \dfrac{f}{d}$, увеличение, даваемое объективом смещенного аппарата, $\Gamma = \dfrac{f_1}{d_1}$, причем $\Gamma_0 = \dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}}$. Приведем промежуточные преобразования: $d_1 = \dfrac{f_1}{\Gamma}$, $d_1 + f_1 = f_1 \dfrac{\Gamma+1}{\Gamma}$, $d = f\dfrac{\sqrt{2}}{\Gamma}$, $d + f = f\dfrac{\Gamma+\sqrt{2}}{\Gamma}$, $\dfrac{f_1+d_1}{d_1 f_1} = \dfrac{f+d}{df}$, $f_1 = f\dfrac{\sqrt{2}(\Gamma+1)}{\Gamma+\sqrt{2}}$. Из записанных выражений, получаем, что $\Delta f = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\Gamma^2-\sqrt{2})}{\Gamma(\Gamma+\sqrt{2})} f$, причем проектор следует удалить от экрана. По условию $\Gamma = \dfrac{2000}{24} = \dfrac{3000}{36} \approx 83{,}3$. Поскольку $\Gamma >> 1$, последнее выражение можно упростить и привести к виду $\Delta f \approx f\dfrac{\Gamma-\Gamma_0}{\Gamma_0+1} \approx f\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 4{,}14$ м.

Ответ: $\Delta f = \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\Gamma^2-\sqrt{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\Gamma_0+1)} f \approx f\dfrac{\Gamma-\Gamma_0}{(\Gamma_0+1)} \approx f\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 4$ м, где $\Gamma = \dfrac{2000}{24} \approx 83{,}3$; $\Gamma_0 = \dfrac{\Gamma}{\sqrt{2}} \approx 58{,}9$.

Поскольку увеличение изображения достаточно велико ($\Gamma, \Gamma_0 >> 1$), ответы при обоих подходах практически совпадают. Поэтому оба подхода следует считать правильными.

6. Груз массой $M = 1$ кг подвешен к неподвижной опоре на легкой пружине. Удерживая груз в положении равновесия, на него кладут брусок массой $m = 0{,}2$ кг, а затем отпускают. С какой максимальной силой $F_{\max}$ брусок будет действовать на груз в процессе движения? Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

6. Решение. Из условия равновесия неподвижно висящего груза $kx_0 = Mg$ следует, что удлинение пружины при этом равно $x_0 = \dfrac{Mg}{k}$, где k – жесткость пружины. Выберем начало отсчета потенциальной энергии в точке, совпадающей с концом недеформированной пружины. Учитывая, что при максимальном растяжении пружины ($x = x_{\max}$) скорость груза с бруском обращается в нуль, запишем закон сохранения энергии: $\dfrac{kx_0^2}{2} - (M+m)gx_0 = \dfrac{kx_{\max}^2}{2} - (M+m)gx_{\max}$. Подставляя сюда x_0, находим, что $x_{\max} = \dfrac{(M+2m)g}{k}$. Запишем далее уравнения движения для груза с бруском и отдельно для бруска: $(M+m)a = (M+m)g - kx$, $ma = mg - F$. Отсюда сила, с которой груз действует на брусок, $F = \dfrac{mkx}{M+m}$. Максимальное значение эта сила принимает при $x = x_{\max}$.

Объединяя записанные выражения, получаем, что $F_{\max} = mg\dfrac{M+2m}{M+m} \approx 2{,}33$ Н. **Ответ.** $F_{\max} = mg\dfrac{M+2m}{M+m} \approx 2{,}33$ Н.