Заключительный этап
Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике
14 марта 2021 г.
Задачи 7 класса
Возможные решения (максимум 10 баллов за задачу)

1. Мимо деревни А в сторону деревни Б течет река. В 9-00 из А в Б отправилась лодка "Ветерок", и одновременно с этим, из Б в А, отправилась лодка "Вихрь". Они встретились ровно посередине пути из А в Б. В 18-00 эти же лодки отправились в обратных направлениях. Теперь они встретились в момент, когда лодка "Ветерок" проплыла всего 30% пути до А. Чему равна скорость течения реки, если ее можно считать постоянной на всей реке, а лодка "Вихрь" имеет скорость 24 км/ч относительно воды?

Возможное решение

Введем обозначения, которые будут использованы при записи соотношений, связывающих разные величины из задачи. Пусть U - искомая скорость течения реки, V_1=30 км/ч - скорость лодки "Вихрь", V_2 - скорость лодки "Ветерок", L - длина пути лодок между деревнями (она неизвестна, но для ответа не понадобится).

При одновременном старте в 9-00 каждая лодка проплыла одно и то же расстояние (L/2) за одно и то же время. Поскольку лодка "Ветерок" плыла по течению, то сразу можно записать следующее уравнение (равенство скоростей относительно берега):

$V_2+U=V_1-U$, или $2U=V_1-V_2$ (+2 балла за связь скоростей, найденную из первого условия).

На обратном пути время движения каждой лодки до их встречи также одинаково:

$\frac{7 \cdot L}{10 \cdot (V_1+U)} = \frac{3 \cdot L}{10 \cdot (V_2-U)}$ (+1 балл за это или аналогичное исходное уравнение).

Здесь учтено, что лодка "Ветерок" проплыла 3/10 всего расстояния, а лодка "Вихрь", соответственно, 7/10. Преобразуя это уравнение, получаем:

$3(V_1+U)=7(V_2–U)$ или $10U=7V_2–3V_1$ (+2 балла за дополнительную связь скоростей)

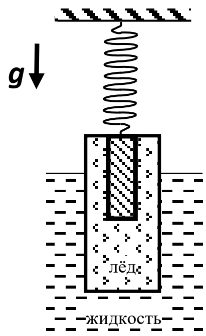
Таким образом, $5(V_1-V_2)= 7V_2–3V_1$ и можно найти скорость лодки "Ветерок"

$V_2 = 2V_1/3$=16 км/ч (+2 балла за соотношение, которое позволяет найти промежуточную величину и приблизиться к ответу).

Соответственно, U=4 км/ч (+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

Отметим, что уравнения могут быть преобразованы так, что необходимости явного вычисления промежуточных величин не возникает. Баллы за такой способ решения не снимаются.

2. Металлический брусок размерами 2см×2см×6см вморожен в кусок льда с внешними размерами 4см×4см×12см так, что центр верхней стороны (2×2) бруска совпадает с центром верхней стороны (4×4) куска льда. Брусок вместе с куском льда подвешен на пружине и опущен в неизвестную жидкость, как показано на рисунке. Когда лед растаял, то образовавшаяся вода растеклась по поверхности жидкости очень тонким слоем, брусок оказался погруженным наполовину, а деформация пружины не изменилась. Во сколько раз плотность неизвестной жидкости больше, чем плотность льда?



Возможное решение

Обозначим массу и объем металлического бруска, как M и V (хотя этот объем известен, но его конкретная величина не понадобится), F - сила упругости пружины, $\rho_л$ и $\rho_ж$ - плотности льда и жидкости соответственно. Искомой величиной является отношение $\rho_ж/\rho_л$.

Из условия задачи следует, что сила упругости пружины F одна и та же в исходной и конечной ситуации (+1 балл). Также по внешним размерам куска льда можно рассчитать, что объем собственно льда равен 7V, а его масса $7V\cdot\rho_л$ (+1 балл).

Из того, что в конечной ситуации тело погружено на половину высоты (3 см), пружина не изменила своей деформации, а уровень окружающей его жидкости и воды не изменился, следует, что в исходном положении составное тело "брусок/намороженный лёд" погружено на 3/4 своего объема (+2 балла).

Условие равновесия тела с намороженным льдом с учетом пружины имеет вид

$$\frac{3}{4}\cdot 8V\cdot\rho_Ж\cdot g + F = (M + 7V\cdot\rho_Л)g$$ (+2 балла)

После таяния льда аналогичное условие имеет вид

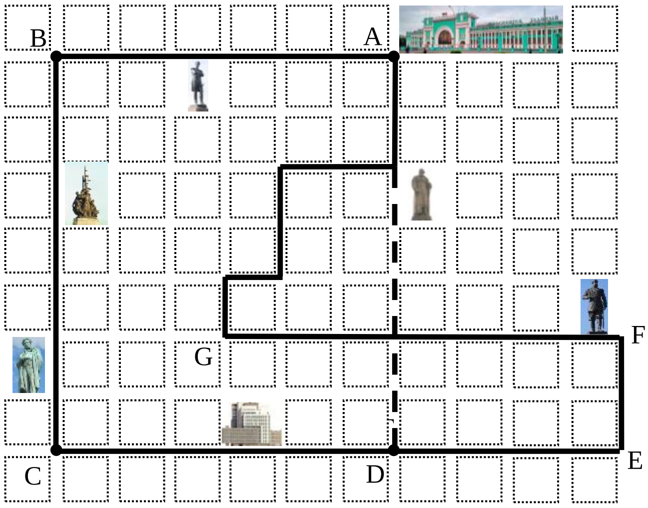
$$\frac{1}{2}\cdot V\cdot\rho_Ж\cdot g + F = Mg$$ (+1 балл)

Вычитая второе уравнение из первого, получаем, что

$$\frac{11}{2}\cdot\rho_Ж = 7\cdot\rho_Л$$ (+1 балл)

Таким образом, плотность жидкости больше плотности льда в 14/11 раза (+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

3. В городе N все кварталы имеют вид одинаковых квадратов, а улицы – перпендикулярны друг другу. Турист в 9-00 вышел прогуляться по городу и наметил маршрут в виде прямоугольника ABCD, рассчитывая прийти ровно через 4 часа в начальную точку. Но, прогуливаясь, он пропустил нужный поворот и вместо точки D повернул в точке E. В точке F он понял свою ошибку, повернул обратно. В точке G он понял, что заблудился, и решил взять такси. Через 10 минут приехало такси и довезло его до т. A в 14-10, при этом во время движения такси все время приближалось к т. A. Определите по этим данным во сколько раз средняя скорость движения такси больше скорости туриста во время прогулки. Шириной улиц по сравнению с размерами квартала пренебречь.



Возможное решение

Обозначим за **X** длину стороны квартала, V_0 и V_1 - скорости ходьбы туриста и движения такси, соответственно. $\mathbf{T_0}$ =4 ч – время прогулки туриста по плану, $\mathbf{T_1}$ =7/6 ч – фактическая задержка туриста, $\mathbf{T_2}$ - время (пока неизвестное) движения на такси. Судя по приведенному плану города, турист планировал пройти 26 кварталов, т.е.

$$26\mathbf{X}=\mathbf{V_0}\cdot\mathbf{T_0} \quad \text{или} \quad \mathbf{V_0}=26\mathbf{X}/\mathbf{T_0}$$

(+1 балл за выражение связи между средней скоростью движения туриста и параметрами условия).

Реальное расстояние, которое преодолел турист пешком, составило 32**X**, а на такси, независимо от конкретной траектории по кварталам, 8**X** (+1 балл). Поэтому время движения пешком составило $32\mathbf{X}/\mathbf{V_0}=(32/26)\cdot(26\mathbf{X}/\mathbf{V_0})= (32/26)\cdot\mathbf{T_0} =(32/26)\cdot4=64/13$ ч (+1 балл), а движения на такси $\mathbf{T_2=(8X/V_1)}$.

Длительности временных промежутков связаны соотношением

$$(32/26)\cdot\mathbf{T_0}+1/6+\mathbf{T_2}= \mathbf{T_0}+\mathbf{T_1} \quad (+1 \text{ балл}).$$

Здесь учтено, что по условию турист ожидал такси в течение 1/6 часа.

Таким образом, $\mathbf{T_2=(8X/V_1)=T_1}-1/6-(6/26)\cdot\mathbf{T_0}=1/13$ ч (+2 балла).

Можно заметить, что

$$\mathbf{T_2= (8X/V_1)= (8X/V_1\cdot V_0/V_0)=(8X/V_0)/(V_1/V_0)}=8/26\cdot(26\cdot\mathbf{X/V_0})/(\mathbf{V_1/V_0})= 8/26\cdot\mathbf{T_0}/(\mathbf{V_1/V_0}),$$

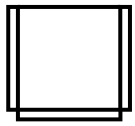
т.е. искомое отношение скоростей можно найти следующим образом:

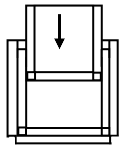
$$(\mathbf{V_1/V_0}) =8/26\cdot\mathbf{T_0}/\mathbf{T_2} =8/26\cdot4/(1/13) = 16$$

(+1 балл за аналитическое выражение, связывающее искомую величину с данными задачи, и +3 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

Если при вычислении времен движения на отдельных промежутках проводилось округление (1/6 ч ≈0.17 ч, 1/13 ч≈0.08 ч, 64/13 ч ≈4.9 ч), которое привело к получению приближенного значения искомой величины, то всего при корректном решении ставится 9 баллов.

4. Школьник нашел большое количество разных квадратных пластин, сделанных из материала толщиной, равной d=1/6 см. Подбирая пластины одинакового размера, он сделал много разных коробок в виде куба без крышки (для примера см. рис. сверху). Затем школьник стал подбирать и вставлять коробки друг в друга так, чтобы между соседними коробками практически не было зазоров (условно показано на рис. снизу).





Чему примерно равна суммарная площадь внутренних поверхностей всех составленных вместе коробок, если у самой большой из них эта площадь была равна S_1=2000 см^2, а у самой маленькой – в 4 раза меньше? Влиянием мест сочленения пластин на форму коробки можно пренебречь.

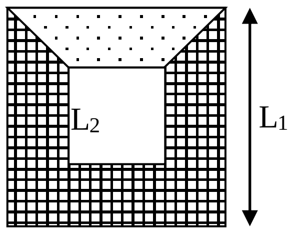
Возможное решение

Введем обозначения: d=1/6 см – толщина стенки каждой из коробок, L_1 – длина ребра самой большой из составленных вместе коробок (измеряемая с внутренней стороны), L_2 – длина ребра самой маленькой коробки, S_1=2000 см^3 – площадь внутренней поверхности самой большой коробки, S_2=500 см^3 – площадь внутренней поверхности самой маленькой коробки. S_X – искомая площадь, V – объем материала, использованного для изготовления всех составленных коробок.

Поскольку каждая коробка составлена из 5 пластин, то L_1=20 см (+ 1 балл), L_2=10 см (+1 балл). Всего же составленных вместе коробок будет $(L_2\text{-}L_1)/(2d)+1=31$ шт (+1 балл). Здесь учтено, что длина ребра следующей коробки увеличивается на 2d.

Заметим, что результатом умножения площади пластины на ее толщину является объем пластины. Поэтому суммарную площадь внутренней поверхности всех составленных вместе коробок, т.е. всех составленных вместе пластин, можно рассчитать следующим образом:

$S_X = V/d$ (+2 балла за это или аналогичное соотношение)



По условию формой мест сочленения пластин на форму, т.е. и на объем, можно пренебречь. Поэтому в первом приближении можно считать, что объем израсходованного материала совпадает с объемом сплошной фигуры, повторяющей внешнюю форму вставленных друг в друга коробок (см. поясняющий рисунок).

Из этого рисунка видно, что полный объем материала, затраченного на изготовление всех коробок, составляет $V\approx(5/6)\cdot(L_1^3\text{-}\ L_2^3)+d\cdot S_1$ (+2 балла). Наличие второго слагаемого ($d\cdot S_1$) обусловлено тем, что L_1 - длина ребра, измеренная по внутренней стороне самой большой коробки, т.е. ее объем надо учесть отдельно. Для объяснения коэффициента 5/6 можно заметить, что если бы все коробки были с крышками, то объем материала составил бы примерно $L_1^3\text{-}\ L_2^3$. Верхняя часть, которая выделена на рисунке точками, составляет шестую часть всей конструкции, так как все 5 остальных частей, из которых составлено тело на рисунке, имеют такие же форму и размеры.

Таким образом, искомая площадь $S_X\approx5\cdot(L_1^3\text{-}\ L_2^3)/(6d)+S_1$=37000 см^2 (+2 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ). Однако полученная величина искомой площади несколько выше, чем точный ответ (≈36253 см^2), поскольку при его получении считается, что составленные вместе коробки не имеют пустот между ними. На самом деле в местах сгиба такие пустоты есть, и за оценку и учет их объема ставится еще один балл. Оценку можно провести следующим образом. На каждую коробку с длиной внутренней стороны L объем таких пустот составит примерно $(8+4/2)\cdot(L+d)d^2$. Здесь $(L+d)d^2$ - объем пустоты вдоль ребра коробки, т.е. пренебрегается пересечением таких объемов по углам. Второе слагаемое в скобках записано так, чтобы учесть, что объем, связанный с 4-мя верхними ребрами, фактически учтен наполовину при введении коэффициента 5/6.

Лишний объем пустот составит примерно $\Delta V=10\cdot d^2\ [(L_1+d)+(L_1+d+2d)+\ (L_1+d+4d)+\ldots +(L_1+d+58d)] = 300\cdot(L_1+d)d^2+10\cdot d^3(1+2+\ldots+29)= 300\cdot(L_1+d)d^2+\ 10\cdot d^3(29\cdot 30/2)\approx 105$ см^3, а "лишняя" площадь - $\Delta V/d\approx 630$ см^2. Т.е. уточненная оценка составляет $S_X\approx$ 37000-630=36370 см^2. (+1 балл)

Вообще говоря, точный ответ можно получить прямым вычислением суммы площадей коробок, если знать, например, выражение для суммы ряда $1+4+9+\ldots+n^2= n(n+1)(2n+1)/6$. Однако за использование такой или иной точной формулы каких-либо дополнительных баллов не начисляется.

Если приведенное решение фактически не учитывает отличия всех составленных коробок от комбинации двух целых кубов, то всего ставится 7 баллов. Если в качестве оценки искомой площади выбирается произведение количества коробок (31) на площадь средней коробки (5·15·15=1125), т.е. около 34880 см^2, то ставится 5 баллов.

Задача не считается решенной, если приводится только ответ!
Желаем успеха!