Второй этап (заочный) Всесибирской олимпиады по физике
(25 декабря 2018 г. - 20 января 2019 г.)
Задачи 9 класса
Возможные решения

Задача оценивается в 5 баллов при полном решении и правильном ответе в указанных в условии единицах. Если требуется найти несколько величин, то их значения приводятся в ответе через точку с запятой. Числовой ответ, если иное не оговорено в условии, округляется до трёх значащих цифр. Например, полученное расчетом число 328,51 округляется до 329; 2,003 – до 2,00; 5,0081 – до 5,01; 0,60135 – до 0,601, 0,0012345 – до 0,00123 и т.д. Желательно указать наименование единиц, в которых измерена соответствующая физическая величина. Ответ (округлённый) нужно внести в таблицу. Если в условии задачи не указана система единиц, в таблицу нужно вносить результат в системе СИ. При невыполнении любого из требований за задачу ставится 0 баллов. Без представления таблицы работа не проверяется.

1. Если в ведро, частично заполненное водой, погрузить шесть деревянных кубиков или 15 камней той же массы, вода достигает его края. Найти плотность камня. Плотность воды 1000 кг/м^3.

Возможное решение

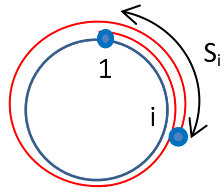
1) Обозначим массу кубика или камня m. Деревянные кубики плавают, поэтому объем вытесненной воды равен $V = 6m/\rho_0$ (ρ_0 – плотность воды).

2) Камни тонут в воде, поэтому объем вытесненный ими воды (такой же по условию) будет $V = 15m/\rho$. Плотность камня $\rho = 2.5\rho_0 = 2500$ кг/м^3.

Ответ: 2500 кг/м^3 или 2500

2. Два вращающихся вала с параллельными осями касаются и не проскальзывают друг относительно друга. Первый вал имеет радиус 3 см, второй – 5 см. На первый вал нанесли маленькую капельку краски. Сколько окрашенных пятен будет на первом и втором валу через продолжительное время?

Возможное решение



1) За одно время каждый из валов прокатывается по дуге одной и той же длины. Примем, что длина окружности первого вала L_1, а второго - L_2, так что $L_2/L_1 = 5/3$. В некоторый момент пятно первого вала отпечатается на втором валу. Если после этого второй вал совершит *n* полных оборотов, отпечаток на втором валу создаст на первом валу новые пятна, причем длина дуги S_i, соединяющей первое пятно с новыми пятнами, будет отличаться от nL_2 на целое число L_1:

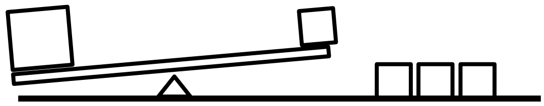
$n_i L_2 = k_i L_1 + S_i$, откуда $S_i = (5n_i - 3k_i)\dfrac{L_1}{3} = m_i \dfrac{L_1}{3}$, где *m* – целое число.

2) Аналогичные рассуждения для второго вала дадут длины $\bar{S}_j = (3n_j - 5k_j)\dfrac{L_2}{5} = m_j \dfrac{L_1}{3}$, то есть, вторичные пятна на обоих валах будут занимать позиции, разделенные целым количеством дуг длины $L_1/3$. Таких позиций 3 на первом валу и 5 на втором.

3) Остается показать, что все такие позиции будут заполнены. Действительно, после одного оборота второго вала на первом и на втором валу появятся по два пятна, разделенные дугой $\dfrac{L_1}{3}$. Поскольку каждое следующее пятно можно считать первым в вновь отпечатанной последовательности пятен, мы придем к выводу, что все позиции с целыми числами *m* будут заняты пятнами краски.

Ответ: 3; 5.

3. Слева на качели положили кубик с ребром 48 см, так, чтобы его левый край точно совпал с краем качелей (см. рисунок). Какое минимальное количество выполненных из того же материала кубиков с ребром 30 см нужно в один слой положить на правую сторону качелей, чтобы они перевесили кубик справа? Длина качелей от их левого края до правого – 4 м, ширина 25 см. Массой качелей пренебречь.

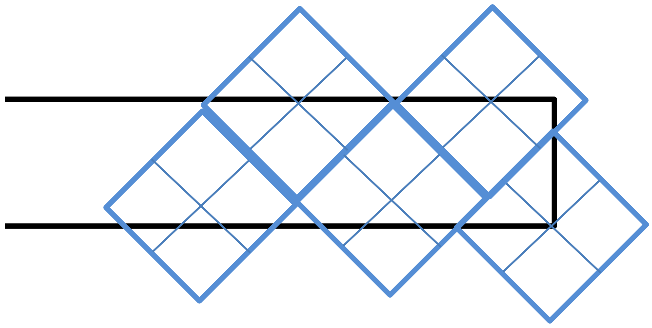


Возможное решение

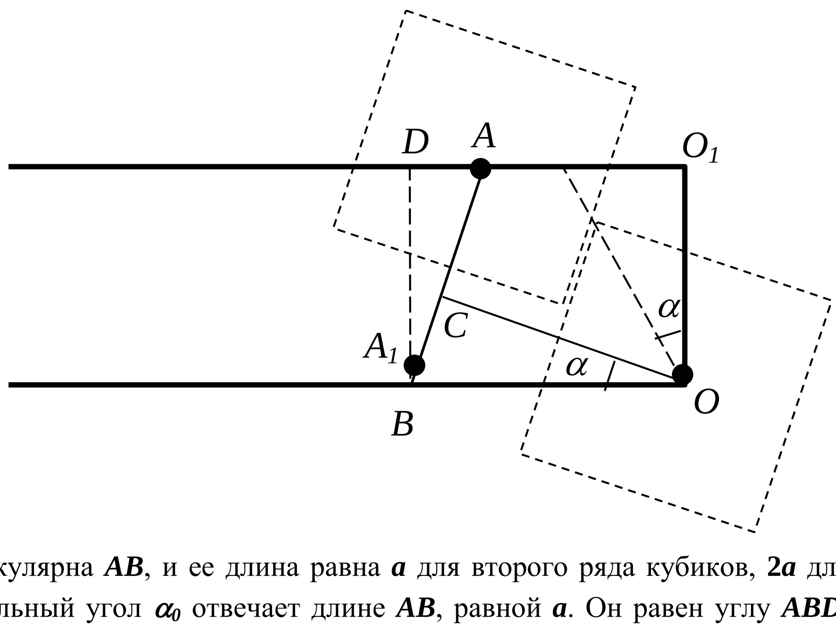
1) Пусть масса малого кубика m. Масса большого кубика $m_1 = m\dfrac{48^3}{30^3} = 4{,}096m$

2) Момент силы тяжести большого кубика $M_1 = m_1 g(L-b)/2 = (7{,}209\text{м})mg$, где L и b – длина качелей и ребро большого кубика.

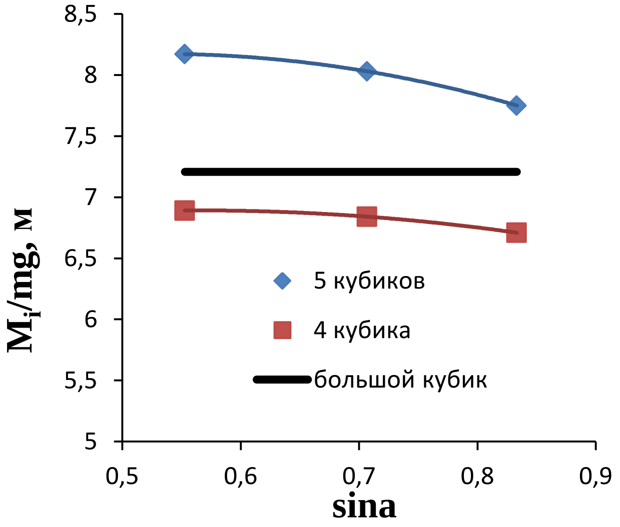
3) Рассмотрим два способа решения задачи. Первый способ: маленькие кубики выкладываются в один ряд. Если центр первого кубика расположить над краем качелей, то плечо каждого следующего кубика будет на величину его ребра меньше предыдущего, и момент силы тяжести N кубиков будет $M_{2,N} = Nmg(L - a(N-1))/2$, где a – ребро маленького кубика. Подставив значения, получаем: $M_{2,5} = (7\text{м})\cdot mg < M_1$, $M_{2,6} = (7{,}5\text{м})\cdot mg > M_1$, откуда следует, что потребуется 6 кубиков.



Для того, чтобы реализовать второй способ, нужно принять во внимание наличие не отображенного на рисунке из условия третьего измерения и посмотреть на качели сверху. Сделав это, мы увидим возможность расположить кубики по две штуки в ряду под углом к качелям, как это показано на рисунке (вид сверху). Если центр первого кубика расположить над углом ***O*** качелей и повернуть его под углом α к качелям (см. чертеж), центр следующего кубика можно будет разместить над линией ***AB*** – это обеспечит максимальный момент действующей на качели силы. Второй кубик нужно расположить в точке ***B***, а третий – в точке A_1 на линии ***AB*** на расстоянии от точки ***A***, равном ребру кубика ***a***. Линия ***OC*** перпендикулярна ***AB***, и ее длина равна ***a*** для второго ряда кубиков, **2*a*** для третьего, и так далее. Минимальный угол α_0 отвечает длине ***AB***, равной ***a***. Он равен углу ***ABD***,



образованном линией ***AB*** с перпендикуляром к краю качелей, $\cos\alpha_0 = h/a, \sin\alpha_0 = \sqrt{a^2 - h^2}/a$, где h – ширина качелей. Расстояние от проекции центра второго кубика до края качелей $S_2 = AO_1 = a/\cos\alpha - h\cdot tg\alpha$, для третьего кубика эта величина будет $S_3 = S_2 - a\sin\alpha$, для четвертого кубика $S_4 = 2a/\cos\alpha - h\cdot tg\alpha$, пятого - $S_5 = S_4 - a\sin\alpha$, и т.д. Момент силы, создаваемый кубиком номер *N*, будет $M_N = m(L/2 - S_N)$ при условии $S_1 = 0$ Момент четырех кубиков будет $M_{2,4} = (2L - 4a/\cos\alpha + 3h\cdot tg\alpha - a\sin\alpha)mg$, пяти - $M_{2,5} = (5L/2 - 6a/\cos\alpha + 4h\cdot tg\alpha - 2a\sin\alpha)mg$. При увеличении угла за пределом $\alpha > 90^\circ - \alpha_0$ создаваемый кубиками момент силы будет заведомо уменьшаться. Поставив в формулы для моментов силы значения угла $\alpha = \alpha_0; \alpha = 45^\circ; \alpha = 90^\circ - \alpha_0$, получим (см. график), что для всех углов $\alpha < 90^\circ - \alpha_0$ пять малых кубиков перевесят один большой, а четыре – нет. Таким образом, второй, «трехмерный» способ уравновешивания позволяет обойтись меньшим количеством маленьких кубиков, чем первый, и решает задачу с помощью пяти кубиков.



Ответ: 5.

4. К смесителю подведена горячая вода с температурой T_1 = 90° С и холодная с температурой T_2 = 10° С. Определите расход горячей и холодной воды, при котором из смесителя расходуется Q = 1 л/мин воды с температурой T = 40° С. Потерями тепла в окружающую среду пренебречь. Расход определите в литрах в минуту.

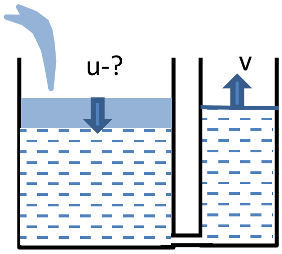
Возможное решение

1) Баланс объема воды: $Q = Q_1 + Q_2$, где Q_1 – расход горячей воды, а Q_2 – холодной воды.

2) Баланс тепла: $\rho c Q T = \rho c Q_1 T_1 + \rho c Q_2 T_2$, где ρ и c – плотность и удельная теплоемкость воды.

В итоге $Q_1 = Q\dfrac{T - T_2}{T_1 - T_2} = \dfrac{3}{8}$ **л/мин,** $Q_2 = Q\dfrac{T_1 - T}{T_1 - T_2} = \dfrac{5}{8}$ **л/мин.**

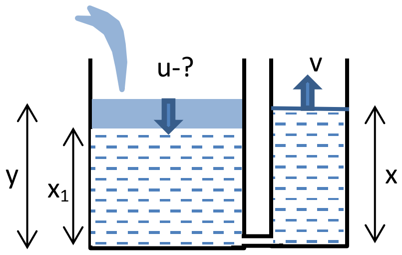
Ответ: 0,375 л/мин; 0,625 л/мин или 0,375; 0,625.



5. Два цилиндра сечением S_1 и S_2, $S_1/S_2=2$, внизу соединены тонкой трубкой. В цилиндрах находится жидкость плотности ρ_0 = 1000 кг/м^3. В первый цилиндр (сечением S_1) начинают медленно наливать жидкость плотности ρ = 800 кг/м^3. Во втором цилиндре поверхность жидкости поднимается со скоростью v =1 см/с. С какой скоростью поднимается уровень жидкости в первом цилиндре? Скорость определите в сантиметрах в секунду.

Возможное решение

Обозначим скорость, с которой понижается граница раздела жидкостей в первом цилиндре, v_1.



1) Из условия убыль объема тяжелой жидкости за время Δt в первом цилиндре равна ее прибыли в правом цилиндре, $v_1\Delta tS_1+v_2\Delta tS_2=0$, откуда $v_1=-v/2$.

2) Предположим, что в некоторый момент времени уровень жидкости в первом цилиндре был y, во втором цилиндре был x, а уровень границы раздела жидкостей в первом цилиндре был x_1, запишем условие равновесия $\rho g(y-x_1)=\rho_0 g(x-x_1)$.

3) Приняв, что для другого момента времени уровни будут соответственно $\tilde{x},\tilde{x}_1,\tilde{y}$, получим условие равновесия $\rho g(\tilde{y}-\tilde{x}_1)=\rho_0 g(\tilde{x}-\tilde{x}_1)$.

4) Вычтя из равенства п.3 равенство п.2 и поделив полученное выражение на промежуток времени, получим $\rho g(u-v_1)=\rho_0 g(v-v_1)$.

В итоге $u=\frac{v}{2}\left(\frac{3\rho_0}{\rho}-1\right)\approx 1{,}38$ см/с.

Ответ: 1,38 см/с или 1,38.

6. Геологу в полевых условиях понадобилось измерить удельную теплоемкость неизвестной породы. Температура воздуха и породы составляла -20 °С. В его распоряжении были весы и точная мензурка. Он набрал в мензурку воды из проруби, насыпал в нее 100 г измельченной породы и занес мензурку в палатку, где была небольшая положительная температура. Сразу после насыпки породы мензурка показала увеличение объема на V_1 = 12,82 см^3, затем показания мензурки быстро увеличились до V_2 = 13,07 см^3 и постепенно (за время, много большее времени увеличения объема) вернулись к прежнему значению 12,82 см^3. Определите удельную теплоемкость и плотность породы, если плотность льда при температуре 0° равна 0,917 г/см^3, плотность воды 1 г/см^3, а удельная теплота плавления льда 330 Дж/г. Зависимость плотности вещества от температуры не учитывать. Ответ приведите соответственно в единицах г/см^3 и Дж/г°С с точностью до двух значащих цифр.

Возможное решение

Обозначим массу породы m, ее плотность ρ, удельную теплоемкость c, удельную теплоту плавления льда λ, плотность воды ρ_0, плотность льда ρ_1.

1) Первое показание мензурки отвечает вытесненному породой объему воды: $V_1 = m/\rho$.

2) Затем порода нагрелась за счет тепла, выделившегося при замерзании воды:
$m_1 = mc\Delta T/\lambda$.

3) Объем льда больше объема воды: $V_2 - V_1 = \dfrac{m_1}{\rho_1} - \dfrac{m_1}{\rho_0} = \dfrac{mc\Delta T(\rho_0 - \rho_1)}{\lambda\rho_0\rho_1}$.

В итоге плотность $\rho = m/V_1 \approx$ 7,8 г/см^3, теплоемкость $c = \dfrac{\lambda\rho_0\rho_1(V_2 - V_1)}{m\Delta T(\rho_0 - \rho_1)}$ ≈ 0,46 Дж/г°С.

Ответ: 7,8 г/см^3; 0,46 Дж/г°С или 7,8; 0,46.

7. В цилиндрический стакан налита проводящая жидкость. Высота ее столба h = 20 см, Сопротивление жидкости между дном стакана и ее открытой поверхностью равно R = 100 Ом. Жидкость перелили в прямоугольную кювету. Каким будет ее сопротивление между левым и правым краем кюветы, если расстояние между ними равно L = 30 см? Для измерения сопротивления между двумя поверхностями используют тонкие медные пластины, прикладываемые к поверхностям и повторяющие их форму.

Возможное решение

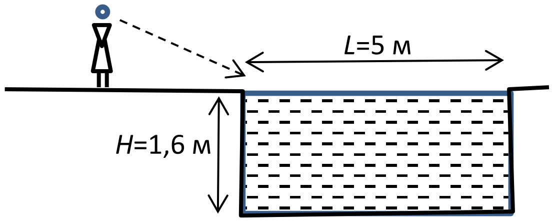
1) В первом случае сопротивление будет $R = \rho h / S$, где S – площадь сечения стакана.

2) Сопротивление жидкости в кювете $R_x = \rho L / db$, где d и b – соответственно, глубина слоя жидкости и ширина кюветы.

3) Объем жидкости в обоих случаях одинаков $Sh = Lbd$.

В итоге $R_x = \dfrac{RL^2}{h^2} = 225$ Ом.

Ответ: 225 Ом или 225.



8. Дно бассейна шириной 5 м и глубиной 1,6 м выстлано кафельной плиткой размером 30×30 см^2. Сколько рядов плиток увидит человек с расстояния S = 3,2 м от края бассейна? Рост человека таков, что его глаза оказываются на высоте 1,6 м от пола. Бассейн полностью заполнен водой, показатель преломления которой равен n=1,33. Необходимо учитывать ряды, которые видны частично.

Возможное решение

1) Ближний край видимой части дна отвечает лучу, проходящему вблизи ближнего края бассейна и попадающему в глаз наблюдателя.

2) Определим угол преломления этого луча $tg\beta = 2; \sin\beta = 1/\sqrt{1+1/tg^2\beta} = 2/\sqrt{5}$.

3) Из закона Снеллиуса определим угол падения $\sin\alpha = \sin\beta / n = 2/(1{,}33\sqrt{5})$.

4) Определим расстояние от точки дна, из которой выходит рассматриваемый луч до левого края дна $x = Htg\alpha = H\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} \approx 1{,}45$ м. Протяженность видимой части дна бассейна $x_0 = L - x \approx 3{,}56 м > 11 \times 0{,}3 м$.

Результат: полностью или частично видно 12 рядов кафеля.

Ответ: 12.

9. Поезд разгоняется с постоянным ускорением. В момент времени t_1= 12 час 21 мин голова поезда проходит под мостом, в момент времени t_2 =12 час 21 мин 40 сек она проходит переезд, удаленный от моста на расстояние L_1 = 480 м, а в момент времени t_3 = 12 час 22 мин 20 сек - полустанок на расстоянии L_2 =1120 м от моста. Когда отправился поезд? Ответ выразите в часах, минутах и секундах.

Возможное решение

1) Допустим, поезд отправился во время t_0, и двигался с ускорением a. К мосту он подъехал со скоростью $v = a(t_1 - t_0)$.

2) Расстояние L_1 прошел за время $t_2 - t_1$: $L_1 = a(t_1 - t_0)(t_2 - t_1) + \frac{a(t_2 - t_1)^2}{2}$. Аналогичное выражение для промежутка мост - полустанок: $L_2 = a(t_1 - t_0)(t_3 - t_1) + \frac{a(t_3 - t_1)^2}{2}$. Исключаем a: $(t_1 - t_0)(L_1(t_3 - t_1) - L_2(t_2 - t_1)) = \frac{L_2(t_2 - t_1)^2 - L_1(t_3 - t_1)^2}{2}$.

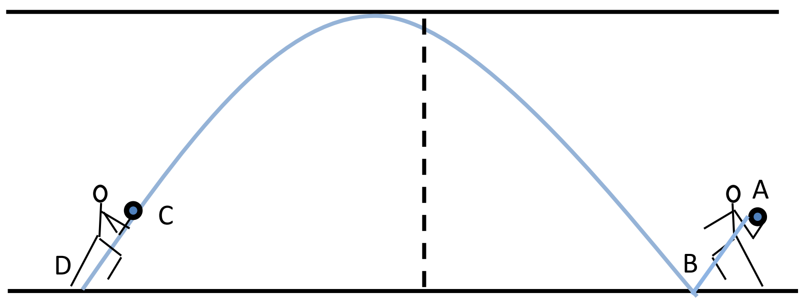
В результате $t_0 = t_1 - \frac{L_2(t_2 - t_1)^2 - L_1(t_3 - t_1)^2}{2(L_1(t_3 - t_1) - L_2(t_2 - t_1))}$ = 12 час 19 мин 20 сек.

Ответ: 12 час 19 мин 20 сек.

10. Спортсмен бросает мяч таким образом, что он совершает три удара, упруго отскочив от пола, от стены, и от потолка, и возвращается в руки спортсмена. Определите минимальную скорость, с которой он должен бросить мяч, чтобы данный сценарий реализовался. Спортсмен находится на расстоянии L = 10 м от стены спортзала, от которой отскакивает мяч, высота потолка спортзала H = 5 м, высота, с которой спортсмен бросает и на которой принимает мяч, h =1,5 м. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Трения нет, сопротивлением воздуха пренебречь.

Возможное решение

1. Задача, в которой стена отсутствует, а мяч передается другому спортсмену, находящемуся в зеркально симметричной, относительно стены, точке, на расстоянии $2L$ от первого спортсмена, эквивалентна решаемой задаче.



2. Поскольку перемещения по вертикали заданы, время движения t принимает максимальное значение при минимальной начальной вертикальной скорости. В горизонтальном направлении мяч с постоянной скоростью проходит дистанцию $2L$, так что минимальной вертикальной скорости будет отвечать минимальная горизонтальная скорость $V_x = 2L/t$.

3. Минимальная начальная вертикальная скорость отвечает ситуации, когда вершина параболической траектории мяча находится практически на высоте потолка. Она равна $V_y = \sqrt{2g(H-h)}$

4. Поскольку участок траектории мяча AB (см. рис.) совпадает с частью параболической траектории CD, время движения мяча равно времени перемещения по параболической траектории BD. Это время равно удвоенному времени падения из вершины траектории до пола $t = 2\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$, так что $V_x = \dfrac{L\sqrt{g}}{\sqrt{2H}}$.

5. Полную величину скорости находим по теореме Пифагора:

$$V = \sqrt{\frac{L^2 g}{2H} + 2g(H-h)} \approx 13{,}0 \text{ м/с}.$$

Ответ: 13 м/с или 13.

№ задачи	Ответ
1	2500 кг/м^3 или 2500
2	3; 5
3	5
4	0,375 л/мин; 0,625 л/мин или 0,375; 0,625
5	1,38 см/с или 1,38
6	7,80 г/см^3; 0,46 Дж/г°C или 7,8; 0,46
7	225 Ом или 225
8	12
9	12 час 19 мин 20 сек
10	13 м/с или 13