Заключительный этап Всесибирской олимпиады по физике
Задачи для 8 класса. (11 марта 2018 г.)
Возможные решения (максимум за задачу – 10 баллов)

1. Между пунктами А и Б по реке плавают два катера. Они отправляются утром из п. А одновременно и в конце рабочего дня также прибывают в п. А одновременно. Скорости катеров относительно воды равны 20 км/ч и 40 км/ч. Поэтому один из них успевает побывать в п. Б 21 раз за день, а другой – только 10 раз. Какова скорость течения реки, если считать ее постоянной, а временем стоянки катеров можно пренебречь?

Решение: Обозначим L расстояние между пунктами А и Б вдоль реки, u=20 км/ч – скорость более медленного катера, v – искомая скорость течения. Время движения катера от п. А до п. Б и обратно будет равно $\left(\frac{L}{2u+v}+\frac{L}{2u-v}\right)$ для быстрого катера (+ 2 балла)

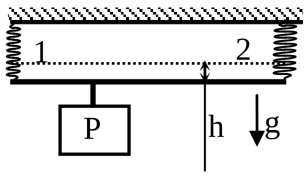
и $\left(\frac{L}{u+v}+\frac{L}{u-v}\right)$ для медленного (+ 2 балла).

Так как длительность рабочего дня для обоих катеров одинакова, то можно получить соотношение (более быстрый катер большее число раз проплывет дистанцию)

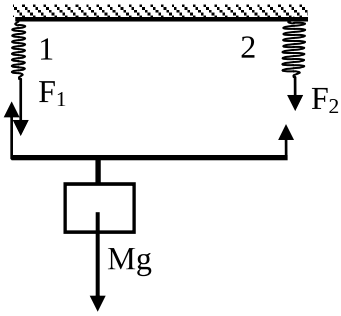
$$21\cdot\left(\frac{L}{2u+v}+\frac{L}{2u-v}\right)=10\cdot\left(\frac{L}{u+v}+\frac{L}{u-v}\right)$$

(+3 балла за это или аналогичное уравнение).
Решая его, получаем, что $u^2=16v^2$, т.е. v=u/4=5 км/ч (+ 3 балла).

2. Школьник собрал конструкцию из очень легкой палки и двух пружин и прикрепил ее к горизонтальному потолку, как показано на рисунке. После этого он прикрепил к палке груз с весом P=6 Н, и палка опустилась на расстояние h=5 см. Каковы коэффициенты жесткости каждой из пружин, если место подвеса груза делит длину палки в отношении 1:2? Пружины прикреплены к концам палки. Считать, что палка всегда находится в горизонтальном положении.



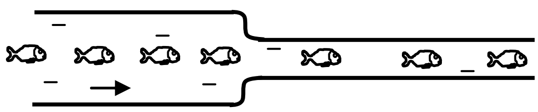
Решение: Из условия горизонтальности потолка и палки следует, что длины пружин всегда одинаковы (+1 балл). Из условия легкости палки следует, что начальная длина пружин одинакова (+1 балл), т.е. их деформации также всегда одинаковы и в конечном положении равны h=5 см (+1 балл). Палка совершенно не поворачивается после появления сил F_1 и F_2, которые действуют на ее концы со стороны пружин (см. поясняющий рисунок). Это значит, что *моменты* этих сил относительно точки подвеса груза одинаковы по величине и направлены в разные стороны. Поскольку плечи этих сил относятся как 1:2, то $F_1/F_2=2$. (+2 балла)



Груз находится в равновесии, т.е. P= F_1+F_2. (+1 балл). Решение этих двух уравнений на F_1 и F_2 позволяет определить, что F_1= 4 Н (+1 балл) и F_2 =2 Н (+ 1 балл).

Далее можно рассчитать коэффициенты жесткости пружин: $k_1=F_1/h=4/0.05=80$ Н/м (+1 балл) и $k_2=F_2/h=2/0.05=40$ Н/м (+1 балл).

3. Две трубы квадратного сечения (20 см × 20 см и 40 см × 40 см) соединили и получившуюся длинную трубу положили на дно реки. Много одинаковых маленьких рыбок играют, проплывая вдоль этой трубы от одного до другого конца. Рыбки заплывают в трубу по очереди, всегда через один и тот же промежуток времени. Когда они заплывают со стороны широкого конца, то внутри широкой части трубы одновременно находится N_1=9 рыбок, а внутри узкой – N_2=3. А когда они заплывают в трубу с другого конца, то в широкой части одновременно находится K_1=13 рыбок. Определите число K_2 рыбок, которые в это время находятся внутри узкой части трубы, если скорости рыбок относительно воды всегда одинаковы. Стрелка на рисунке показывает направление движения воды внутри трубы.



Решение: Для удобства составления уравнений введем обозначения: v – скорость рыбок относительно воды, u_1 – скорость воды в широкой части трубы, u_2 – скорость воды в узкой части трубы, L_1 - длина широкой части трубы, L_2 - длина узкой части трубы, Т – время, через которое рыбки заплывают в трубу, S_1 – площадь сечения трубы в широкой части, S_2 – площадь сечения трубы в узкой части (S_1/S_2=4).

Из условия несжимаемости жидкости следует, что за любой промежуток времени t объем жидкости, затекающей в трубу, равен объему жидкости, вытекающей с другого конца за тот же промежуток времени: $S_1 \cdot u_1 \cdot t = S_2 \cdot u_2 \cdot t$. Значит, скорости жидкости в разных частях трубы связаны соотношением u_2/u_1=4 (+ 2 балла).

Соотношение для числа рыбок в той или иной части трубы можно найти, определив расстояние между рыбками, т.е. путь, которая рыбка успевает преодолеть к моменту заплывания следующей. С учетом уже полученного соотношения между скоростями, получаем:

$N_1 = \dfrac{L_1/T}{(v+u_1)}$; $N_2 = \dfrac{L_2/T}{(v+4u_1)}$; $K_1 = \dfrac{L_1/T}{(v-u_1)}$; $K_2 = \dfrac{L_2/T}{(v-4u_1)}$; (по +1 баллу за каждое соотношение).

Из условия задачи следует, что $\dfrac{N_1}{K_1} = \dfrac{(v-u_1)}{(v+u_1)} = \dfrac{9}{13}$.

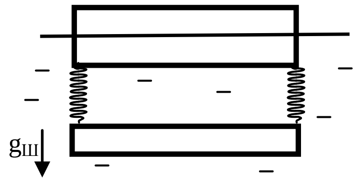
Отсюда получаем, что $\dfrac{v}{u_1} = \dfrac{11}{2}$ (+ 1 балл).

Аналогично получаем отношение $\dfrac{N_2}{K_2} = \dfrac{(v-4u_1)}{(v+4u_1)} = \dfrac{3}{19}$ (+ 1 балл),

т.е. K_2=19 рыбок (+ 2 балла).

Для справки – при таких данных задачи отношение длин равно $\dfrac{L_1}{L_2} = \dfrac{13}{5}$.

4. На планете Шелезяка II тамошние школьники из одного и того же материала сделали два прямоугольных бруска размерами 0.3ϒ×1ϒ×2ϒ и 0.1ϒ×1ϒ×2ϒ (ϒ - обозначение шелезячной единицы измерения длины). Они соединены четырьмя одинаковыми пружинами по углам так, что большие грани обращены друг к другу. Всю конструкцию положили в жидкость, как показано на рисунке. После установления равновесия оказалось, что верхний брусок погружен в жидкость наполовину.



Всю конструкцию переворачивают «вверх ногами» и снова опускают плавать в жидкость. Во сколько раз изменилась величина деформации пружин в новом положении равновесия, если пружины подчиняются закону Гука? Учтите, что плотность атмосферы *в месте проведения* экспериментов в 5 раз меньше плотности жидкости. Массой и объемом пружин пренебречь.

Решение:

Введем обозначения: $\rho_Б$ - плотность брусков, $\rho_Ж$ - плотность жидкости , g – ускорение свободного падения в месте проведения экспериментов, k – суммарный коэффициент жесткости пружин, L_1 -величина деформации каждой пружины в начальной ситуации.

По условию объем верхнего бруска, независимо от названия единиц измерения, втрое больше, чем у нижнего. Если V – объем нижнего бруска, то в жидкость погружен объем $3V/2$ верхнего бруска.

Условие равновесия всей конструкции в целом в начальной ситуации имеет вид (с учетом того, что плотность атмосферы составляет $\rho_Ж/5$):

$$\rho_Ж \cdot g \cdot (V + \frac{3}{2}V) + \frac{\rho_Ж}{5} \cdot g \cdot \frac{3}{2}V = \rho_Б \cdot g \cdot 4V$$

(+ 3 балла за это или аналогичное уравнение). Левая часть равенства вычисляется как равнодействующая сил давления среды на верхние и нижние стороны брусков (для объема слоя выполняется равенство $V=S\cdot h$, где S – площадь поперечного сечения, h – высота слоя).

Таким образом, $\rho_Б=7\rho_Ж/10$ (+ 1 балл).

Поскольку бруски имеют одинаковую плотность, и вся конструкция плавает, то нижний брусок удерживается в жидкости силой упругости пружин, направленной вниз (+ 1 балл). Это означает, что пружины сжаты. Условие равновесия для нижнего бруска в жидкости имеет вид:

$$kL_1 = \rho_Ж gV - \rho_Б gV \qquad \text{(+1 балл)}$$

После переворачивания конструкции верхний брусок вообще не будет погружен в жидкость, так как необходимое для плавания конструкции значение выталкивающей силы будет достигнуто уже при погружении 5/6 части большого бруска. Каждая пружина при этом тоже сжата, так как плотность атмосферы меньше плотности бруска.

Теперь условие равновесия для меньшего бруска имеет вид:

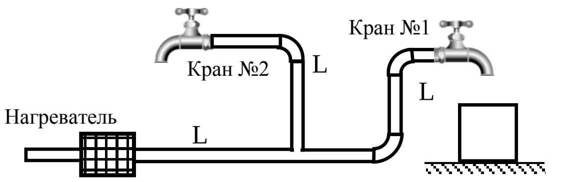
$$kL_2 = \rho_Б gV - \frac{\rho_Ж}{5} \cdot gV \qquad \text{(+2 балла)}$$

Здесь L_2 – новая деформация каждой пружины. С учетом приведенных выше уравнений искомое отношение величин деформации пружин равно

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{(\rho_Б - \rho_Ж/5)\cdot gV}{(\rho_Ж - \rho_Б)gV} = \frac{5}{3} \approx 1.67 \text{ раза (+ 2 балла)}$$

Заметим, что при фиксированной доле погруженного объема ответ от величины отношения плотностей атмосферы и жидкости не зависит. Если задача корректно решена только для случая $\rho_{АТМ}=0$, то всего ставится 5 баллов.

5. Жидкость подается от нагревателя к двум кранам по трубам постоянного диаметра (см. рис.). Нагреватель, который повышает температуру протекающей через него воды до определенного значения, включают и начинают набирать воду из крана №1 в ведро (кран №2 закрыт). Когда ведро набралось, кран №1 закрыли. Измерение температуры воды в этом ведре дало значение T_1. Затем набрали еще одно полное ведро воды из крана №2, после чего кран также закрыли. Температура воды во втором ведре составила T_2 ($T_2 \neq T_1$). Третье ведро снова набрали из крана №1. Какую температуру T_3 имеет вода в этом ведре?



Вначале температура воды везде одинакова. Диаметры всех труб и объемы ведер одинаковы, теплообменом между жидкостью и трубами пренебречь, жидкость в трубах не перемешивается и имеет постоянную плотность. Длина труб от *места разветвления* до нагревателя и до каждого из кранов равна L.

Решение: Обозначим температуру исходной холодной воды T_X, а температуру, до которой вода подогревается нагревателем, $T_Г$.

Поскольку объемы ведер одинаковы, то за время набора в ведро вода смещается вдоль трубы на одну и ту же величину (+1 балл), которую обозначим X. Масса воды на единицу длины трубы при этом равна M/X. Заметим, что из $T_2 \neq T_1$ следует X>L (+1 балл), т.к. горячая вода в какое-то из ведер заведомо попадает.

Возможны два разных варианта: а) X>2L и б) 2L>X.

Случай «а»:

Условие теплового баланса для воды в первом ведре имеет вид:

$$M \cdot \frac{2L}{X} \cdot C \cdot T_X + M \cdot \frac{X-2L}{X} \cdot C \cdot T_Г = M \cdot C \cdot T_1 \quad \text{(+1 балл)}$$

Здесь M – масса воды в ведре, C – удельная теплоемкость воды.

Условие теплового баланса для воды во втором ведре, набранном из крана №2, имеет вид (в трубе длиной L находится холодная вода):

$$M \cdot \frac{L}{X} \cdot C \cdot T_X + M \cdot \frac{X-L}{X} \cdot C \cdot T_Г = M \cdot C \cdot T_2 \quad \text{(+1 балл)}$$

В данном случае температура воды в третьем набранном ведре будет равна $T_Г$, так как вся труба уже заполнена горячей водой.

Из первых двух уравнений получаем соотношение

$\frac{T_Г - T_1}{T_Г - T_2} = 2$, т.е. искомая температура равна $T_3 = T_Г = 2 \cdot T_2 - T_1$ (+2 балла)

Случай «б»:

В данном случае температура воды в первом набранном ведре будет равна $T_1 = T_X$, так как горячая вода до крана №1 не доходит, а граница раздела холодной и подогретой воды находится на расстоянии 2L-X от крана №1.

Условие теплового баланса для воды во втором ведре имеет вид:

$$M \cdot \frac{L}{X} \cdot C \cdot T_X + M \cdot \frac{X-L}{X} \cdot C \cdot T_Г = M \cdot C \cdot T_2 \quad \text{(+1 балл)}$$

Для третьего ведра аналогично имеем:

$$M \cdot \frac{2L-X}{X} \cdot C \cdot T_X + M \cdot \frac{2X-2L}{X} \cdot C \cdot T_Г = M \cdot C \cdot T_3 \quad \text{(+1 балл)}$$

Отсюда получаем соотношение (при условии $T_1 = T_X$)

$\frac{2T_Г - T_1 - T_3}{T_Г - T_2} = 2$, т.е. выражение для искомой температуры оказывается тем же самым что и в случае «а»: $T_3 = 2 \cdot T_2 - T_1$ (+2 балла).