

Задача оценивается в 5 баллов при полном решении и правильном ответе в указанных в условии единицах. Если требуется найти несколько величин, то их значения приводятся в ответе через точку с запятой. Числовой ответ, если иное не оговорено в условии, округляется до трёх значащих цифр. Например, полученное расчётом число 328,51 округляется до 329; 2,003 – до 2,00; 5,0081 – до 5,01; 0,60135 – до 0,601 и т.д. Ответ (округлённый) нужно внести в таблицу. При невыполнении любого из требований за задачу ставится 0 баллов. Без представления таблицы работа не проверяется.

1. В Институте ядерной физики г. Новосибирска в декабре 2015 года был получен рекордный протонный пучок со значением тока $I = 5$ мА и кинетической энергией протонов $E = 2$ МэВ ($2 \cdot 10^6$ электрон-вольт). "Длина" пучка $L = 7,5$ м. Чему равно число протонов в пучке? Ответ округлите до двух значащих цифр.

Комментарий: Имеется в виду «рекордность» в сочетании параметров «энергия + ток» именно для протонного пучка.

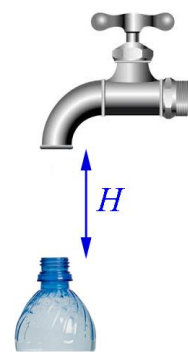
Возможное решение

Согласно справочникам: масса протона $m_p \approx 1,673 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона (элементарный заряд) $e \approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, 1 эВ $\approx 1,602 \cdot 10^{-19}$ Дж.

$$\text{Так как } \frac{m_p}{2} V^2 = E, \text{ то } V = \sqrt{\frac{2E}{m_p}}; \quad N = \frac{I \Delta t}{e} = \frac{I \cdot L}{e \cdot V} = \frac{I \cdot L}{e} \sqrt{\frac{m_p}{2E}} \approx \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 7,5}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,957 \cdot 10^7} \approx 1,2 \cdot 10^{10}.$$

Ответ: $1,2 \cdot 10^{10}$.

2. Горлышко бутылки с внутренним диаметром $D = 1$ см находится на расстоянии $H = 10$ см ниже водопроводного крана, внутренний диаметр носика которого $D_0 = 2$ см. Центры горлышка бутылки и носика крана находятся на одной вертикали. При каком максимальном расходе воды Q_0 (в л/с) вся вода будет попадать в бутылку? Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с². Считать течение воды спокойным (ламинарным).



Возможное решение

Скорость на уровне горлышка: $V^2 = V_0^2 + 2gH$. Условие непрерывности (вся вода попадает в горлышко): $Q_0 = \pi V_0 D_0^2 = \pi V D^2$, откуда получаем $V_0 = \sqrt{\frac{2gH}{D_0^4/D^4 - 1}}$.

$$Q_0 = \pi V_0 D_0^2 / 4 = \sqrt{\frac{gH}{8(D_0^4/D^4 - 1)}} \cdot \pi D_0^2 \approx 0,114 \text{ л/с.}$$

Ответ: 0,114 или 0,114 л/с.

3. Начинающие спортсмены играют в настольный теннис «на тычках». При этом ракетка всегда сталкивается с шариком, двигаясь навстречу ему, а плоскость ракетки перпендикулярна к направлению скорости. Скорость подлетающего к спортсмену шарика $V = 10$ м/с, скорость ракетки - $U = 3$ м/с. Какую энергию (в джоулях) теряет шарик за один перелет между спортсменами, если его масса $m = 2,7$ г? Ответ округлите до двух значащих цифр.

Возможное решение

Масса ракетки существенно больше массы шарика. Поэтому скорость отлетающего шарика равна $V + 2U$. Это получается, если перейти в систему отсчета «Ракетка», в которой шарик имеет скорость $V + U$, отражается от ракетки с той же по модулю скоростью. При переходе обратно в лабораторную систему «Земля», получим $V + 2U$.

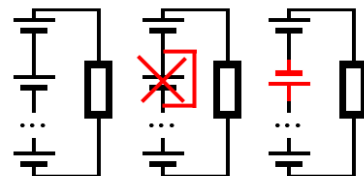
Потерянная энергия равна разности кинетической энергии отлетевшего и падающего шарика:

$$m \frac{(V + 2U)^2}{2} - m \frac{V^2}{2} \approx 0,21 \text{ Дж.}$$

Ответ: 0,21 или 0,21 Дж.

4. Несколько одинаковых батареек соединены последовательно.

При этом в нагрузке с сопротивлением $R = 3$ Ом выделяется мощность $P_0 = 38,9$ Вт. Если одну батарейку убрать, мощность становится $P_1 = 32,1$ Вт. Если одну батарейку перевернуть, мощность будет $P_2 = 17,3$ Вт. Найти количество батареек и ЭДС \mathcal{E} каждой. Ответ округлите до двух значащих цифр.



Возможное решение

Пусть искомое количество батареек равно N , а внутреннее сопротивление каждой r . Запишем выражения для выделяемой мощности на нагрузке во всех обозначенных случаях.

$$P_0 = \left(\frac{N\mathcal{E}}{Nr + R} \right)^2 R \quad (1), \quad P_1 = \left(\frac{(N-1)\mathcal{E}}{(N-1)r + R} \right)^2 R \quad (2), \quad P_2 = \left(\frac{(N-2)\mathcal{E}}{Nr + R} \right)^2 R \quad (3).$$

Поделив (1) на (3), получим $P_0/P_2 = N^2/(N-2)^2 = 2,25$. Откуда $N = 6$ (4).

Соответственно из (1) и (2) с учетом (4), запишем

$$\frac{r}{\mathcal{E}} + \frac{R}{6\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{R}{P_0}} \quad (5), \quad \frac{r}{\mathcal{E}} + \frac{R}{5\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{R}{P_1}} \quad (6). \text{ Вычитая (5) из (6), получим } \mathcal{E} = R / [30(\sqrt{R/P_1} - \sqrt{R/P_2})] \approx 3,6$$

Ответ: 6; 3,6 или 6; 3,6 В.

5. Плоскую поверхность напыляют, направляя на нее разреженный поток частиц двух типов. Одни имеют массу m_1 , а другие – m_2 . Концентрация частиц в потоке (число частиц в единице объема) равны N_1 и N_2 , соответственно. Из эксперимента известно, что при попадании частиц на поверхность удерживается каждая десятая частица массой m_1 и каждая вторая частица массы m_2 . Скорости частиц одинаковы. Определить, какой процент массы поступающих частиц остается на поверхности, если $m_1/m_2 = 4$ и $N_1/N_2 = 0,2$. Взаимодействием частиц друг с другом пренебречь.

Возможное решение

Пусть скорость частиц в потоке равна V , площадь на которую попадают частицы S .

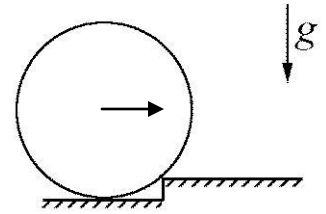
За некоторое время Δt на поверхность попадет масса частиц 1, равная $m_1 N_1 S V \Delta t$. Масса, которую поверхность «удержит», $0,1 m_1 N_1 S V \Delta t$.

Аналогично, для частиц 2: «попадаемая» масса $m_2 N_2 S V \Delta t$, «удерживаемая» масса $0,5 m_2 N_2 S V \Delta t$

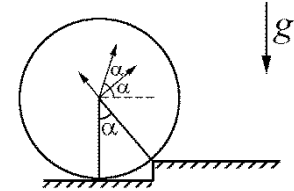
$$\frac{0,1 m_1 N_1 S V \Delta t + 0,5 m_2 N_2 S V \Delta t}{m_1 N_1 S V \Delta t + m_2 N_2 S V \Delta t} = \frac{0,1 m_1 / m_2 N_1 / N_2 + 0,5}{m_1 / m_2 N_1 / N_2 + 1} = \frac{0,1 \cdot 4 \cdot 0,2 + 0,5}{4 \cdot 0,2 + 1} = \frac{0,58}{1,8} \approx 0,322.$$

Ответ: 32,2 или 32,2%.

6. Колесо радиуса R катится по гладкой горизонтальной поверхности и «налетает» на уступ высоты $h < R$. При каком отношении величины h к R колесо подпрыгнет на максимальную высоту? Удар об уступ упругий, трением между колесом и уступом при ударе пренебречь. Ускорение свободного падения g .

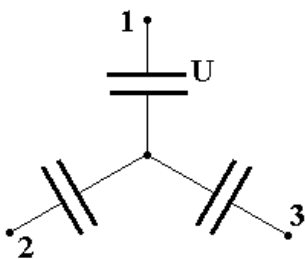


Возможное решение



Пусть скорость колеса равнялась V . При ударе сила действует по направлению радиуса, проведенного из уступа к центру колеса. Она не изменяет компоненту скорости $V \cos \alpha$ в поперечном этому радиусу направлении. Продольная же компонента скорости $V \sin \alpha$ меняет знак; происходит отражение, как от плоскости, наклоненной под углом α . В результате колесо отскакивает под углом 2α к горизонту, так что вертикальная скорость равна $V \sin 2\alpha$. Эта скорость максимальна при $\sin 2\alpha = 1$, т.е. при вертикальном отскоке, и $\alpha = 45^\circ$. При этом высота уступа равна $R(1 - \cos \alpha) = R(1 - 1/\sqrt{2}) \approx 0,293R$. Или можно сказать, что скорость отскока V (сохранение энергии), и она должна быть направлена вертикально для максимальности высоты. Вращение колеса не играет роли, поскольку трения между колесом и уступом нет. $h/R \approx 0,293$.

Ответ: 0,293.



7. Один из трех одинаковых конденсаторов, соединенных в одной точке, заряжен до напряжения $U = 300$ В. Два других конденсатора вначале не заряжены. Свободные концы выводов двух конденсаторов начинают соединять проводниками попарно на некоторое время: 1 и 2, затем 2 и 3, затем 3 и 1, снова 1 и 2, и так далее. Какое количество энергии (в джоулях) перейдет в тепло после большого количества соединений? Емкость одного конденсатора $C = 100$ мкФ.

Возможное решение

Начальный заряд конденсатора 1 равен $q_0 = CU$. Из-за одинаковой емкости конденсаторов при соединении двух конденсаторов их суммарный заряд на обкладках разделится поровну. Удобно ввести цикл из 3-х соединений. Тогда начальное распределение заряда по конденсаторам $(q_0, 0, 0)$. В 1-м цикле распределения зарядов будут следующие: соединение 1-2: $(q_0/2, q_0/2, 0)$, соединение 2-3: $(q_0/2, q_0/4, q_0/4)$, соединение 3-1: $(3q_0/8, q_0/4, 3q_0/8)$.

Составим таблицу:

Заряды на конденсаторах по завершению циклов	Заряд конденсаторе 1	Заряд на конденсаторе 2	Заряд на конденсаторе 3
Начальное состояние	q_0	0	0
Завершение 1-го цикла	$3q_0/8$	$q_0/4$	$3q_0/8$
Завершение 2-го цикла	$21q_0/64$	$11q_0/32$	$21q_0/64$
Завершение 3-го цикла	$171q_0/512$	$85q_0/256$	$171q_0/512$
Завершение N -го цикла (по индукции)	$q_0 \frac{[8^N + (-1)^{N+1}]}{3 \cdot 8^N}$	$q_0 \frac{[8^N + 2(-1)^N]}{3 \cdot 8^N}$	$q_0 \frac{[8^N + (-1)^{N+1}]}{3 \cdot 8^N}$
Предел при больших N	$q_0/3$	$q_0/3$	$q_0/3$

Начальная энергия 1-го конденсатора $W_0 = CU^2/2 = q_0^2/2C$. Суммарная энергия всех конденсаторах в конце процессов перезарядки $W_K = 3q_0^2/18C = CU^2/6$. В виде тепла выделится энергия $W_0 - W_K = CU^2/3 = 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^4 / 3 = 3$ Дж.

Комментарий: Можно сразу догадаться, что перетекание зарядов при контактах прекратятся, когда все заряды будут одинаковыми, и, следовательно, равны $q_0/3$ каждый.

Ответ: 3 или 3 Дж.

8. В гладкой горизонтальной трубе внутреннего сечения $S = 100\text{см}^2$, изготовленной из непроводящего материала, на расстоянии $L = 1\text{см}$ находятся два поршня одинаковой массы $m = 20\text{г}$. Поршни имеют одинаковые по величине, но противоположные по знаку заряды $Q = 0,35 \cdot 10^{-6}\text{Кл}$ ($0,35\text{мкКл}$). Между поршнями находится газообразный гелий, а снаружи вакуум. Между поршнями происходит электрический разряд, в результате чего они полностью разряжаются. Какой будет конечная скорость поршней (в м/с) при их дальнейшем разлете? Трением пренебречь. Система теплоизолирована. Ответ округлите до двух значащих цифр.

Возможное решение

Поршни представляют собой плоский конденсатор с емкостью $C = \frac{\epsilon_0 S}{L}$, начальная энергия которого

$$\text{равна } W_{c,0} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 L}{2\epsilon_0 S}.$$

Электрическое поле, создаваемое одной пластиной, равно половине поля плоского конденсатора $E = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$. Сила притяжения заряженных пластин $F = QE = Q \frac{Q}{2\epsilon_0 S}$ в начальном состоянии

уравновешивается силой давления газа PS , откуда начальное давление в газе $P = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S^2}$.

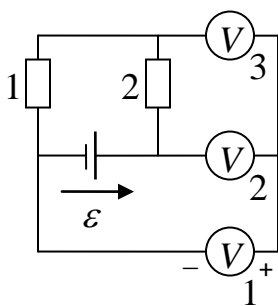
Начальная внутренняя энергия газа $W_{GAS,0} = \frac{3}{2}PSL = \frac{3Q^2 L}{4\epsilon_0 S}$ (поскольку гелий – одноатомный газ).

Полная начальная энергия системы $W_0 = W_{c,0} + W_{GAS,0} = \frac{5Q^2 L}{4\epsilon_0 S}$.

После пробоя энергия конденсатора переходит во внутреннюю энергию газа, поршни разгоняются давлением газа, приобретая одинаковые по величине и противоположно направленные скорости.

Конечная скорость поршней находится из ЗСЭ $mV^2 = W_0 = \frac{5Q^2 L}{4\epsilon_0 S}$. Откуда $V = \sqrt{\frac{5Q^2 L}{4m\epsilon_0 S}} \approx 0,93$

Ответ: 0,93 или 0,93 м/с.



9. Схема состоит из идеальной батареи с ЭДС $\epsilon = 21\text{ В}$, двух сопротивлений (1 и 2) и трех одинаковых вольтметров (1, 2 и 3) с достаточно большим внутренним сопротивлением. Первый вольтметр показывает напряжение $V_1 = 9\text{ В}$, его полярность показана на рисунке. Какое напряжение показывают второй и третий вольтметры? Во сколько раз сопротивление второго резистора больше сопротивления первого?

Возможное решение

Согласно 2-му правилу Кирхгофа для нижнего контура $\epsilon = V_1 + V_2$.

Откуда $V_2 = 12\text{ В}$. Для узла соединения 3-х вольтметров из 1-го правила Кирхгофа $J_1 = J_2 + J_3$. Умножая это равенство на внутреннее сопротивление

вольтметров, имеем $V_1 = V_2 + V_3$. Откуда $V_3 = 2V_1 - \epsilon = -3\text{ В}$. Используя 2-е правило Кирхгофа обхода по двум контурам $R_1 \rightarrow V_3 \rightarrow V_1 \rightarrow R_1$ и $R_2 \rightarrow V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow R_2$, имеем

$$JR_1 = V_3 + V_1 \text{ и } JR_2 = V_2 - V_3 \Rightarrow R_2/R_1 = (V_2 - V_3)/(V_1 + V_3).$$

Следовательно, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{2\epsilon - 3V_1}{3V_1 - \epsilon} = \frac{5}{2} = 2,5$ с учетом смены полярности у 3-его вольтметра.

Откуда $V_2 = 12\text{ В}$, $V_3 = 3\text{ В}$, $R_2/R_1 = 2,5$.

Ответ: 12; 3; 2,5 или 12В; 3В; 2,5.

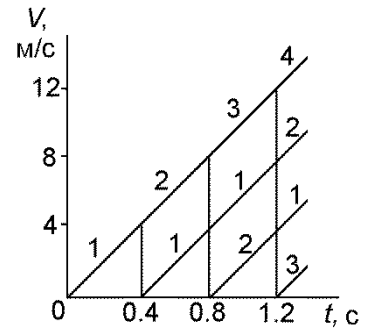
10. В вертикально закрепленной открытой сверху и снизу трубе расположены 4 одинаковых металлических шарика. Верхний находится на высоте 10 м над нижним краем трубы, второй на 80 см ниже, третий на 2.4 м ниже второго, четвертый на 4 м ниже третьего. Шарики удерживаются тонкими спичками, вставленными в стенки трубы. Спичку под верхним шариком убирают, он падает и ударяется о второй, при этом ломается вторая спичка. Далее при ударах следующие спички также ломаются и перестают удерживать шарики. Какие скорости будут иметь первый и второй шарики к моменту, когда нижний шарик достигнет нижнего края трубы? Ускорение силы тяжести принять равным 10 м/с^2 . Соударения шариков упругие. Размерами шариков, потерями энергии при разрушении спичек, сопротивлением воздуха, трением между шариками и стенками пренебречь.

Возможное решение

Из законов сохранения следует, что одинаковые шарики при упругом ударе обмениваются скоростями. При первом ударе скорость первого шарика передается второму, и т.д. Поэтому самый нижний из двигающихся шариков всегда имеет такую же скорость, как если бы он свободно падал с самого верха.

Время падения с высоты $H = 10 \text{ м}$ равно $\sqrt{2H/g} = \sqrt{2} \approx 1,414 \text{ с}$.

Расстояния от верха до второго и последующих шариков равны 0.8, 3.2, 7.2 м, или $0.8 \times (1, 4, 9) \text{ м}$, то есть относятся как квадраты целых чисел. Поэтому каждый следующий шарик начинает движение через одинаковое время, согласно формуле $h = gt^2/2$. Первый удар происходит через $\sqrt{2 \cdot 0,8/10} = 0,4 \text{ с}$, третий шарик начнет падать через 0,8 с, четвертый – через 1,2 с. Зависимости скоростей шариков от времени показаны на рисунке. Площади под графиками обозначают пройденные расстояния. Видно, что шарики 1 и 2 первый раз встречаются в момент 0,4 с, а в момент 1,2 с произойдет их вторая встреча, после которой скорость первого шарика будет 4 м/с, а второго 8 м/с. За оставшееся время 0,214 с шарики наберут по 2,14 м/с. Скорость первого шарика в момент падения четвертого будет 6,14 м/с, а второго 10,14 м/с.



Ответ: 6,14; 10,1 или 6,14 м/с; 10,1 м/с.

№ задачи	ответ
1.	$1,2 \cdot 10^{10}$
2.	0,114 или 0,114 л/с
3.	0,21 или 0,21 Дж
4.	6; 3,6 или 6; 3,6В
5.	32,2 или 32,2%
6.	0,293
7.	3 или 3 Дж
8.	0,93 или 0,93 м/с
9.	12; 3; 2,5 или 12В; 3В; 2,5
10.	6,14; 10,1 или 6,14 м/с; 10,1 м/с