

Заочный этап Всесибирской олимпиады.

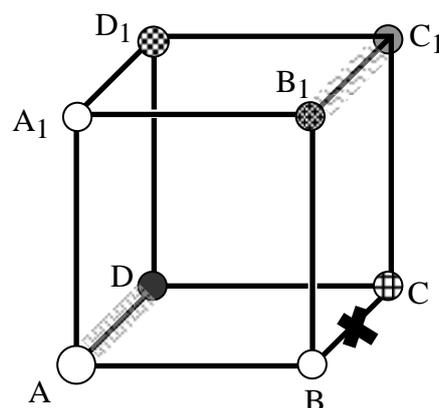
7-8 классы,

Физика

Возможные решения с баллами. Максимальный балл за задачу – 10.

7 класс

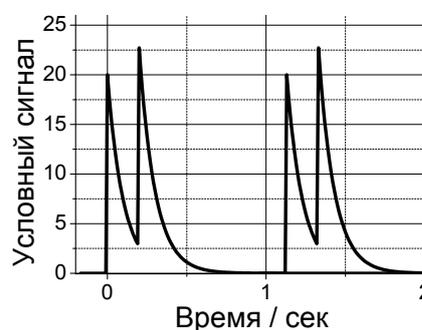
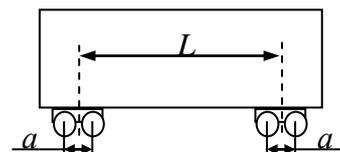
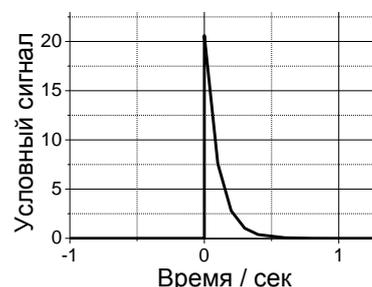
1) В одной галактике есть 8 планетных систем, которые для краткости называют А, В, С, D, A<sub>1</sub>, B<sub>1</sub>, C<sub>1</sub>, D<sub>1</sub>. Эти системы расположены в вершинах гигантского куба (см. рис). Космонавту надо слетать из системы А в системы С и D<sub>1</sub> и вернуться обратно. Предложите путь, который потребует для такого полета наименьшего времени, если одной заправки ракете хватает только на путь между ближайшими системами. Еще известно, что между В и С орудуют пираты, и там летать нельзя, а на участках между А и D, а также B<sub>1</sub> и C<sub>1</sub>, из-за метеоритов скорость полета уменьшается вдвое.



*Решение:* Если время полета между А и В, где нет никаких помех, взять за единицу измерения времени, то полет по пути AD будет 2 единицы.

Можно расставить время полета возле каждого ребра куба и выбрать такой путь, чтобы сумма времен была минимальной. Например, для пути ADCDD<sub>1</sub>A<sub>1</sub>A время составит 7 единиц, что является минимально возможным временем, так как между А и D<sub>1</sub> (один вариант), как и между D<sub>1</sub> и С (два варианта), нельзя пролететь быстрее, чем за две единицы времени. Между А и С минимальное время движения – 3 единицы по пути ADC (один вариант). Всего может быть 4 варианта движения, ADCDD<sub>1</sub>A<sub>1</sub>A и AA<sub>1</sub>D<sub>1</sub>C<sub>1</sub>CDA, а также пути с обратным порядком следования. Если указан только один возможный путь, ставится 4 балла, за каждый следующий +2 балла (но не более 8, если не показано, что больше ответов нет). Если при решении явно указано, что рассмотрены только такие пути, что посещение С должно быть ДО посещения D<sub>1</sub> (так можно понять условие), то дополнительные баллы не снимаются.

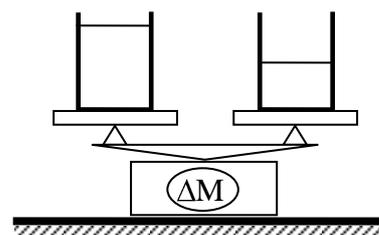
2) Возле железной дороги стоит звуковой датчик, сигналы которого записываются в виде графика от времени. На одном из рельсов образовалась выбоина, и из-за попадания колеса вагона на выбоину датчик выдает сигнал, показанный на графике. Изобразите, как могла бы выглядеть запись сигналов датчика после того, как по выбоине проедет вагон, схематично показанный на рисунке. Размеры:  $L=10$  м,  $a=185$  см. Скорость вагона равна 33 км/ч.



*Решение:* Время между попаданиями на выбоину колес одной тележки будет равно (примерно) 0.2 сек (+2), а между попаданиями первых колес разных тележек – 1.1 сек (+2). Поэтому сигналы от колес одной тележки будут налагаться друг на друга (+2). Возможный вариант, когда

сигналы просто складываются, показан на рисунке (+4). Время отсчитывается от момента попадания первого колеса. Правильным будет считаться любой рисунок, где так или иначе достаточно отчетливо и правдоподобно изображено наложение импульсов.

3) У школьника из обычной земной школы имеются весы, которые показывают разницу масс грузов, находящихся на разных чашках. Он установил на весы два одинаковых стакана, и налил в них 0.8 и 0.5 л разных жидкостей, которые он нашел в школьной лаборатории. Показания весов при этом составили 80 г (вес больше у стакана с большим количеством жидкости).



1) Определите, какие могут быть значения плотностей жидкостей, использованных школьником, если их отношение равно 0.75.

2) Затем школьник перелил жидкость из более тяжелого стакана в другой так, чтобы стаканы уравнились, и хорошо перемешал жидкости во втором стакане. В конце опытов школьник перелил смесь из второго стакана в первый в таком количестве, чтобы восстановить прежние объемы жидкости в стаканах. Какие теперь будут показания весов? Считать, что жидкости после смешивания не разделяются.

*Решение:* Обозначим объем жидкости в первом стакане  $V_1$ , во втором  $V_2$ .

В начальной ситуации  $\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2 = \Delta M_1$ , где  $\Delta M_1 = 80$  г. Дополнительное условие, что отношения плотностей равно  $\frac{3}{4}$ , но неизвестно, какая плотность больше. Проверим оба варианта:

1)  $\rho_1 / \rho_2 = 0.75$ . Тогда

$$0.75 \rho_2 V_1 - \rho_2 V_2 = \Delta M_1,$$

$$\rho_2 = \frac{\Delta M_1}{0.75 V_1 - V_2} = 0.8 \text{ кг/л}, \quad \rho_1 = 0.6 \text{ кг/л}.$$

2)  $\rho_2 / \rho_1 = 0.75$ . Тогда

$$\rho_1 V_1 - 0.75 \rho_1 V_2 = \Delta M_1,$$

$$\rho_1 = \frac{\Delta M_1}{V_1 - 0.75 V_2} \approx 0.19 \text{ кг/л}, \quad \rho_2 \approx 0.14 \text{ кг/л}.$$

Любой справочник покажет, что второго варианта в земной школе быть не может. Подобные плотности могут быть, например, у сжиженных газов при очень низкой температуре, минус 250-270°C.

Далее ориентируемся только на первый вариант (обоснованный выбор варианта +3).

Можно решить задачу компактным способом, вычисляя на каждом шаге искомые величины: при выбранных значениях плотности в первом сосуде 480 г, а во втором 400, т.е. перелили 40 г жидкости при плотности 0.6 г/мл (+1), а объем этой жидкости составил  $\Delta V_1 \approx 66.7$  мл (+1).

После этого средняя плотность жидкости во втором сосуде составила

$$\rho^* \approx 440(\text{г}) / 566.7(\text{мл}) \approx 0.7765 \text{ г/мл} = 0.7765 \text{ кг/л} (+2).$$

По условию, обратно во второй сосуд также вылили  $\Delta V_1$ , масса этой жидкости составила  $\Delta V_1 \cdot \rho^* \approx 66.7 \cdot 0.7765 \approx 51.76$  г (+2).

Окончательные показания весов составят вдвое больше, т.е. примерно 103.5 г (+1).

Если все преобразования проводить в аналитической форме, возможное решение выглядит так: после первого переливания  $\rho_1(V_1 - \Delta V_1) - (\rho_2 V_2 + \rho_1 \Delta V_1) = 0$ , где  $\Delta V_1$  - перелитый объем первой жидкости. Отсюда следует, что  $2\rho_1 \Delta V_1 = \Delta M_1$ , т.е.  $\Delta V_1 = \Delta M_1 / 2\rho_1 \approx 0.067$  л (+1).

После перемешивания первая жидкость равномерно распределится по второму стакану, в котором объем смеси теперь будет равен  $(\Delta V_1 + V_2)$ . Поэтому в смеси, возвращенной в конечном итоге в первый стакан будет как первая, так и вторая жидкости. Доля первой будет

равна  $\frac{\Delta V_1}{V_2 + \Delta V_1}$  (+1 балл), доля второй  $\frac{V_2}{V_2 + \Delta V_1}$  (+1 балл), общий объем перелитой смеси равен  $\Delta V_1$ .

После второго переливания во втором стакане останется  $V_2 \cdot \frac{\Delta V_1}{V_2 + \Delta V_1}$  первой жидкости (по объему), т.е.  $\rho_1 V_2 \cdot \frac{\Delta V_1}{V_2 + \Delta V_1}$  по массе (+1). Точно такой же недостающий объем второй жидкости будет в первом стакане, а ее масса будет равна  $\rho_2 V_2 \cdot \frac{\Delta V_1}{V_2 + \Delta V_1}$  (+1). Теперь различие в показаниях весов составит

$$\Delta M_2 = (\rho_1 (V_1 - \frac{\Delta V_1 \cdot V_2}{V_2 + \Delta V_1}) + \rho_2 \frac{\Delta V_1 \cdot V_2}{V_2 + \Delta V_1}) - (\rho_2 (V_2 - \frac{\Delta V_1 \cdot V_2}{V_2 + \Delta V_1}) + \rho_1 \frac{\Delta V_1 \cdot V_2}{V_2 + \Delta V_1}) \quad (+1)$$

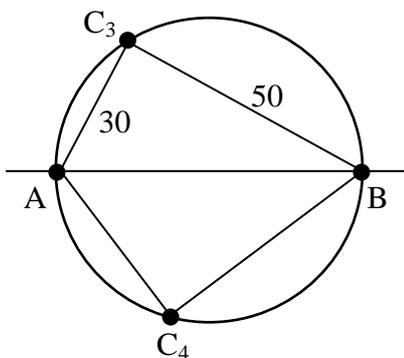
Проводя алгебраические преобразования, получим

$$\Delta M_2 = \Delta M_1 + 2(\rho_2 - \rho_1) \frac{\Delta V_1 \cdot V_2}{V_2 + \Delta V_1} \approx 103.5 \text{ г.} \quad (+1)$$

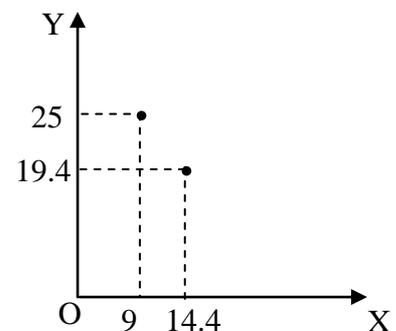
4) В данной задаче предлагается провести геометрическое исследование, для которого требуется несколько листов бумаги, в том числе в клеточку или миллиметровой, линейка, отточенный карандаш. **Решением задачи будут считаться график, на котором представлены результаты измерений, и чертеж (см. ниже).** График должен быть дополнен кратким описанием того, что и каким образом делалось и измерялось. Разумеется, неразборчивый почерк и грамматические ошибки будут сильно затруднять проверку.

*Проведение исследования:*

- 1) Проведите по линейке на листе бумаги линию (длиной более 100 мм).
- 2) С помощью циркуля начертите окружность радиусом 50 мм с центром на этой линии. Точки пересечения линии с окружностью обозначьте А и В.
- 3) Поставьте на окружности в произвольном месте точку С и постройте отрезки АС и ВС.
- 4) Измерьте длину отрезка АС с точностью до миллиметров и запишите в таблицу (см. возможный вариант с условными значениями на рисунке)



	AC	BC	AC <sup>2</sup>	BC <sup>2</sup>
..	...	...	...	...
C <sub>3</sub>	3.0	5.0	9	25
C <sub>4</sub>	3.8	4.4	14.4	19.4
..	...	...	...	...



- 5) Измерьте длину отрезка ВС с той же точностью и тоже запишите в таблицу.
- 6) Поставьте новую точку С<sub>1</sub> на окружности и снова постройте отрезки АС<sub>1</sub> и ВС<sub>1</sub>, измерьте их длины, запишите в таблицу. Желательно, чтобы количество различных точек С<sub>i</sub> было не меньше 10.
- 7) Возведите записанные ранее числа в квадрат (т.е. умножьте каждое само на себя) и тоже запишите в таблицу в той же строке в соседние столбцы (пример с округлением – на рисунке).

8) На клетчатой бумаге нарисуйте оси координат. Масштаб выберите таким, чтобы близко к концу оси можно было поставить точку с координатой 100.

9) Для всех значений поставьте на график точки с координатами  $AC^2$  по горизонтальной оси и  $BC^2$  по вертикальной.

Этот график (или его копия) вместе с чертежом окружности и должен быть приведен в качестве решения задачи. Полезно будет привести и таблицу.

Цель исследования: С помощью графика попробуйте определить, связаны ли между собой квадраты разных сторон треугольников  $ABC_i$  определенной зависимостью. Если да, то какая это может быть зависимость?

Советы: Возможно, что искомую зависимость будет легче обнаружить, если провести такое же построение для окружностей других радиусов. Если решение задачи №5 покажется слишком простым и неинтересным, то попробуйте провести для сравнения аналогичные построения на сферической поверхности (на мяче, воздушном шарике и т.п.). Если говорить научным языком, то это будет геометрическое исследование в двумерном неевклидовом пространстве с положительной кривизной.

Решение оценивается исходя из:

- 1) количества измерений:  $\geq 10$  точек  $C$  – 5 баллов, от 6 до 9 – 3 балла,  $< 6$  точек - 2 балла;
- 2) аккуратности изображения результатов на графике до 3-х баллов;
- 3) обоснованности вывода – до 2-х баллов.

При аккуратном построении будет ясно, что все треугольники  $ABC_i$  – прямоугольные (на плоскости). Соответствующие теоремы про свойства вписанных углов и треугольников будут изучаться в курсе планиметрии.