

Время выполнения задания – 180 минут. Максимальное количество баллов – 100

Задание 1. (25 баллов) Леня очень любит математику, а еще Леня очень любит функции, сейчас он изучает следующую функцию: $-\left(\frac{a \cdot b}{c} + \frac{a \cdot c}{b} + \frac{b \cdot c}{a} + 5 \cdot x\right)$, где a, b, c принимают любые целые значения от -20 до 20 включительно. Он выяснил, что при $x = 5$ максимальное значение, которое может принимать функция равняется 427. Помогите Лене найти максимальное значение функции при $x = 10$.

Задание 2. (25 баллов) Андрей очень любит графы, а еще больше он любит находить графы с какими-нибудь интересными свойствами. Сейчас он занят поиском графа, в котором есть хотя бы одна вершина степени 1, хотя бы одна вершина степени 1000 и среднее степеней соседей по всем вершинам одинаковое. Помогите Андрею либо найти любой граф, подходящий под данные условия, либо доказать, что таких графов не существует. Под графом в данной задаче подразумевается *обыкновенный* граф, то есть неориентированный граф без петель и кратных ребер. Напомним, что под степенью вершины подразумевается количество ребер, исходящих из нее.

Задание 3. (25 баллов) У Лёни есть строка длины 90, состоящая из 0 и 1. Он называет строки длины 68, которые состоят из 0 и 2 *шаблонами*. Лёня любит прикладывать шаблоны к строке так, чтобы шаблон не выходил за границы строки. Особенно ему нравится, если каждая двойка в шаблоне покрывает единицу в строке. Такие покрытия он называет *хорошими*. Например, для строки 11100 и шаблона 200 существует два хороших покрытия: при приложении шаблона, начиная с первого, второго и третьего символа.

Сегодня Лёня нашёл очередной шаблон и уже посчитал, сколько существует хороших покрытий с этим шаблоном и своей строкой.

Но Лёня хочет большего: ему интересно, чему равна сумма хороших вхождений по всем парам строк длины 90 и шаблонов длины 68. И вам предлагается помочь Лене с этим непростым вопросом.

Например, при длине строк 2 и длине шаблонов 1 у Лёни есть 4 различных строки (00, 01, 10 и 11) и 2 различных шаблона (0 и 2). Шаблон 0 не содержит двоек, поэтому его можно приложить в любой из позиций к любой из строк (8 вариантов). Шаблон 2 можно приложить лишь к позициям, на которых стоят единицы (4 варианта). Всего получаем 12 хороших вхождений.

Задание 4. (25 баллов) Вальдемар очень необычный человек. Каждый раз, приходя домой после тяжелого дня, он садится перед камином и начинает заниматься своим любимым делом. Сначала он выбирает некоторое число $N > 2$. Затем он находит все пары различных натуральных чисел, которые дают в сумме N . Для каждой такой пары чисел Вальдемар находит *хог* этой пары, а затем перемножает все полученные значения. Конечно, удовольствие ему доставляет сам процесс. Но его *особенно радует*, когда получившийся результат делится на N . Теперь он спрашивает вас, при каких N он в итоге будет особенно рад.

Например: Пусть N равно 5. Тогда существует две пары натуральных чисел, которые дают в сумме 5 - это (1, 4) и (2, 3).

$$1 \text{ xor } 4 = 5$$

$$2 \text{ xor } 3 = 1$$

Произведение этих чисел равно 5, и так как 5 делится на N , то Вальдемар будет особенно рад.

Напоминаем, что хог двух чисел вычисляется следующим образом: оба числа переводятся в двоичную систему, в результирующем числе на i -ой позиции в двоичной записи стоит 1 тогда и только тогда, когда значения i -ых битов операндов (то есть тех чисел, хог которых мы считаем) различаются.

Например, $7_{10} \text{ xor } 5_{10} = 111_2 \text{ xor } 101_2 = 101_2 = 5_{10}$