

Разбор задач 1-го этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по информатике 2017

Задача 1. Эстафета

Задача решается простой реализацией. Промоделируем последовательно все этапы забега. Пусть массив A будет содержать текущее время каждой команды, массив S – штрафные баллы команд. На старте все значения нулевые. После каждого этапа добавляем к старым значениям в массиве время круга текущего участника команды. После этого для каждой команды считаем сколько команд имеют меньшее время в массиве A – столько штрафных баллов прибавляется к старому значению в массиве S . После 3х кругов для команды I нужно проверить сколько команд имеют меньшее число штрафных баллов, которые записаны в массиве S . Место команды I – следующее за ними.

Задача 2. Стикеры

Пусть у нас есть два числа: $a = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$ и $b = \overline{b_t b_{t-1} \dots b_1}$. Опишем математически, что происходит с числами и с их суммой, если мы меняем между собой цифры в разрядах da и db .

$$a_{new} = a - a_{da} \cdot 10^{da-1} + b_{db} \cdot 10^{da-1}$$

$$b_{new} = b - b_{db} \cdot 10^{db-1} + a_{da} \cdot 10^{db-1}$$

Пусть $S = a + b$, тогда

$$S_{new} = a_{new} + b_{new} = a - a_{da} \cdot 10^{da-1} + b_{db} \cdot 10^{da-1} + b - b_{db} \cdot 10^{db-1} + a_{da} \cdot 10^{db-1} = S + 10^{da-1} \cdot (b_{db} - a_{da}) + 10^{db-1} \cdot (a_{da} - b_{db})$$

Заметим, что S_{new} зависит от четырёх параметров: da , db , a_{da} , b_{db} , но не зависит от самих чисел a и b .

Это позволяет нам отойти от изначальных чисел и работать с парами (цифра, разряд). Для каждой такой пары посчитаем, сколько есть цифр в заданном разряде. Заметим, что так как у нас всего 9 разрядов и 10 цифр, то всего можем существовать не более 90 таких различных пар (в действительности, их ещё меньше). Заметим, что за 90^2 мы можем перебрать, какую пару на какую мы меняем. Аналогичным образом, за 90^4 мы можем перебрать два действия. Стоит заметить, что информацию о парах после первого действия необходимо обновить, так как нам может потребоваться задействовать одну и ту же цифры в обоих действиях.

Внутри перебора мы каждый раз должны пересчитывать нашу новую сумму S_{new} , и если её остаток от деления на M в какой-то момент совпал с T , то необходимо вывести ответ. Так как мы знаем, какие цифры и на каких позициях мы меняли между собой, то восстановить ответ оказывается несложно.

Задача 3. Студия звукозаписи

Задачу можно переформулировать на языке теории графов – дан неориентированный граф, вершинами которого являются либо концы проводов, либо узлы на проводах. Ребро между двумя вершинами показывает, что либо некоторый конец провода соединен с другим концом провода (что означает, что Коля может определить сразу, за 0 действий, к какому устройству ведет данный провод), либо на некотором проводе завязался узел, либо два узла соединены одним или более проводами.

Т.к. одному устройству соответствует лишь один провод, то, выделив компоненты связности в данном графе, можно заметить, что количество концов проводов со стороны пульта диджея (номера от 1 до N) совпадает с количеством концов проводов, которые должны быть подключены к устройствам (номера от $N + 1$ до $2N$).

Посчитаем ответ для компоненты связности, в которой P проводов: необходимо сделать $P - 1$ проверку для первого провода, $P - 2$ проверки для второго и т.д. Сумма такого ряда равна $\frac{P(P-1)}{2}$.

Таким образом, в задаче необходимо было найти компоненты связности и просуммировать ответ для каждой из них.

Задача 4. Контрольная по алгебре

По условию задачи нужно найти такое число B , чтобы $AB + A + B$ делилось на N . Заметим, что $AB + A + B = (A + 1)(B + 1) - 1$. Таким образом произведение $A + 1$ и $B + 1$ дает остаток 1 при делении N . В таком случае говорят, что остаток числа $B + 1$ при делении на N является обратным для остатка $A + 1$. Известно, что обратный остаток существует тогда и только тогда, когда $A + 1$ взаимно просто с N . Находить обратный остаток для данного остатка можно разными способами. Первый из них – использовать расширенный алгоритм Евклида. Этот алгоритм позволяет найти наибольший простой делитель чисел $A + 1$ и N , и если они оказываются взаимно просты, то он также находит целые числа X и Y такие, что $(A + 1)X + NY = 1$. Нетрудно видеть, что в этом случае остаток X при делении на N будет обратным для остатка $A + 1$. Другой способ – использовать теорему Эйлера: если $A + 1$ и N взаимно просты, то $(A + 1)^{\varphi(N)} - 1$ делится на N , где $\varphi(N)$ – число взаимно простых чисел с N и меньших N (функция $\varphi(N)$ – называется функцией Эйлера). Таким образом остаток числа $(A + 1)^{\varphi(N) - 1}$ при делении на N является обратным для $A + 1$. Известно, что если $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$ (т.е. n разложено на простые множители), то $\varphi(n) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \dots (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$. Поэтому чтобы посчитать $(A + 1)^{\varphi(N) - 1}$, нужно N разложить на простые множители, найти значение $\varphi(N)$, а потом остаток $(A + 1)$ возвести в степень $\varphi(N) - 1$ (поскольку N может быть большим, нужно использовать бинарное возведение в степень, также надо не забывать, что требуется найти остаток, поэтому все умножения нужно делать по модулю N , чтобы избежать переполнения значений переменных).

Задача 5. Дедлайн Макара

Задача решается методом динамического программирования. Состояние динамики – длина подстроки, которую уже набрали, ответ – за какое максимальное количество удалений. Изначально доступным является только состояние для длины 0, ответ в этом состоянии 0. Назовем *префиксом* строки – подстроку, состоящую из нескольких первых символов данной строки. Проходим последовательно по мыслям Макара. Для каждой мысли перебираем все состояния динамики – если i -ое состояние доступно, то перебираем префиксы мысли Макара и для j -го префикса обновляем состояние динамики $i + j$ максимумом из его прошлого значения и значения состояния i . Также не забываем обновить i -е состояние, увеличивая его не 1, ведь мы можем выкинуть текущую рассматриваемую мысль Макара. Ответом на задачу будет n -е состояние динамики после обхода всех мыслей Макара.