Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг.
Заключителный этап **9 класс**
Каждая задача оценивается из 7 баллов *Время работы 4 астрономических часа*

9.1. Доказать, что в любом 100-значном натуральном числе можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы в получившемся 99-значном числе количество семёрок, стоящих на чётных (считая слева), позициях, было не больше количества семёрок, стоящих на нечётных, (считая слева), позициях.

9.2. В каждой клетке таблицы 3 на 3 записано некоторое целое число так, что все восемь сумм троек чисел, записанных в клетках каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей, равны одному числу S (то есть таблица является магическим квадратом 3 на 3). Доказать, что S делится на 3.

9.3. Пусть P – основание высоты, опущенной из вершины A прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузу BC, а M – середина отрезка CP. Обозначим за E точку на продолжении стороны AB за точку B такую, что AB=BE. Доказать, что прямые EP и AM перпендикулярны.

9.4. Определим последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{100}$ следующим образом: пусть x_1 - произвольное положительное число, меньшее 1, и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ для всех $n = 1,2,3,\ldots,99$. Докажите, что $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{99}^3 < 1$.

9.5. На шахматной доске 8 на 8 некоторым образом расставлены 8 ладей, ни одна из которых не бьёт другую. Доказать, что каждую из них можно сдвинуть одновременно в одну из соседних с ней по диагонали клеток таким образом, что и после сдвига ни одна из них не будет бить другую. *Напомним*, что шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит.