

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг.
Заключительный этап **11 класс**

Каждая задача оценивается из 7 баллов

Время работы 4 астрономических часа

11.1. На сторонах АВ, ВС, CD и DA квадрата ABCD соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1, доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

11.2. Найти все натуральные n , которые можно представить в виде суммы $n = a^2 + b^2$, где a - минимальный делитель n , отличный от 1, и b - какой-то делитель n .

11.3. Найти все действительные числа a , для которых существуют три различных действительных числа x, y, z таких, что $a = x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$.

11.4. Доказать, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон произвольного вписанного четырёхугольника на его противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

11.5. В некоторых клетках прямоугольной доски размера 101 на 99 сидят по одной черепашке. Каждую минуту каждая из них одновременно переползает в одну из клеток доски, соседнюю с той, в которой они находятся, по стороне. При этом, каждый следующий ход делается ими в направлении, перпендикулярном предыдущему: если предыдущий ход был горизонтальным - налево или направо, то следующий будет вертикальным - вверх или вниз, и наоборот. Какое максимальное количество черепашек может перемещаться по доске неограниченное время так, что в каждый момент в каждой клетке будет находиться не более одной черепашки?