

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все тройки действительных чисел (x, y, z) , являющиеся

решениями системы уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y + z = 1, \\ x + y^2 + z = 1, \\ x + y + z^2 = 1. \end{cases}$$

10.2. Сумма трёх неотрицательных чисел a, b, c не превосходит $\frac{1}{2}$. Доказать,

что $(1-a)(1-b)(1-c) \geq \frac{1}{2}$.

10.3. Пусть M – наименьшее множество чисел такое, что

а) M содержит 1,

б) если M содержит число x , то M обязательно содержит также числа

$$\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x}.$$

Из каких в точности чисел состоит M ?

10.4. Пусть $АН$, $ВР$ и $СТ$ – высоты, а M – середина стороны BC в остроугольном треугольнике ABC . Прямая PM пересекает продолжение стороны AB за вершину B в точке Y , а прямая TH пересекает продолжение стороны AC за вершину C в точке X . Доказать, что прямые BC и XY параллельны.

10.5. Некоторые из 9 вершин правильного 20-ти угольника окрашены в красный цвет. Доказать, что всегда найдутся три красных вершины, образующие равнобедренный треугольник.