

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг

Первый этап

10 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Для каждого действительного числа x обозначим через $h(x)$ наибольшее значение функции $f(t) = t - t^2$ на промежутке $(-\infty, x]$. Найти все решения уравнения:
 $2x^2 - 3x + 3 = 8h(x)$.

10.2. Найти минимальное натуральное число, которое можно получить в виде дроби $\frac{100x}{y}$, где x, y - некоторые двузначные числа.

10.3. Доказать, что для любых $0 \leq x, y \leq 1$ выполнено неравенство $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leq 1$.

10.4. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC . На отрезке CM выбраны точки P и Q так, что P ближе к M , Q ближе к C и $CQ = 2PM$. Оказалось, что $BQ = AC$. Найти величину угла APM .

10.5. Каждый из 10 сортов конфет попробовали больше половины учащихся класса. Докажите, что можно выбрать некоторых трёх учащихся таких, что каждый сорт конфет попробовал хотя бы один из них.