

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2020-2021 гг.

Заключительный этап

10 класс

Каждая задача оценивается из 7 баллов

Время работы 4 астрономических часа

10.1. Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство: $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$.

10.2. Разрезать правильный пятиугольник на несколько треугольников так, чтобы каждый из них граничил ровно с тремя другими. Граничить – значит иметь общий отрезок совместной границы.

10.3. Найти все натуральные n , для которых на клетчатой доске размера n на n клеток можно отметить n клеток, стоящих в разных горизонталях и разных вертикалях, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня, начиная с некоторой, не вставая на одну клетку дважды, и вернуться на исходную клетку. Конь при этом может вставать только на отмеченные клетки.

10.4. Пусть $m < n$ – натуральные числа. Доказать, что среди произвольных последовательных n натуральных чисел всегда найдутся два, произведение которых делится на mn .

10.5. На отрезке АВ отмечена произвольная точка М, отличная от А и В. С одной стороны от прямой АВ выбрана точка С, а с другой – точки D и Е такие, что треугольники АВС, АМD и МВЕ являются равносторонними. Обозначим через Р, Q, R точки пересечения медиан треугольников АВС, АМD и МВЕ соответственно. Доказать, что: а) треугольник РQR – равносторонний, б) точка пересечения медиан треугольника РQR лежит на отрезке АВ.