

**Решения и критерии проверки заданий
второго этапа ВООШ 2020-2021 года**

Каждая задача оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Пусть $a < b < c < d$ - действительные числа. Расположить в порядке возрастания суммы $ab + cd, ac + bd, ad + bc$.

Ответ. $ad + bc, ac + bd, ab + cd$.

Решение. Разность первого и второго чисел из условия равна $ab + cd - (ac + bd) = d(c - b) + a(b - c) = (d - a)(c - b) > 0$. Аналогично, разность второго и третьего чисел из условия равна $ac + bd - (ad + bc) = b(d - c) + a(c - d) = (b - a)(d - c) > 0$. Следовательно, в условии эти числа расставлены в порядке убывания и в ответе этот порядок нужно поменять на обратный.

Критерии проверки. Обоснованно упорядочена только одна пара чисел: 3 балла.

9.2. Ненулевые действительные числа x, y удовлетворяют равенству $2x^2 + 2y^2 = 5xy$.

Найти все возможные значения выражения $\frac{x + y}{x - y}$.

Ответ. 3 и -3.

Решение. Прибавим к обеим частям равенства в условии $4xy$, получим $2x^2 + 4xy + 2y^2 = 2(x + y)^2 = 9xy$, откуда $x + y = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{xy}$. Аналогично, вычтем из обеих частей равенства в условии $4xy$, получим $2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x - y)^2 = xy$, откуда $x - y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{xy}$. При этом знаки в двух случаях не обязаны быть согласованными.

Следовательно, отношение $\frac{x + y}{x - y}$ может принимать одно из двух значений 3 и -3.

Проверим, достигаются ли они в действительности. Решаем систему
$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ x - y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

находим $x = \sqrt{2}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, для них $2x^2 + 2y^2 = 4 + 1 = 5 = 5\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 5xy$ - числа удовлетворяют условию задачи. Следовательно, число 3 является ответом задачи.

Аналогично, решаем систему
$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{\sqrt{2}}, \\ x - y = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$
, находим $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$, для них

$2x^2 + 2y^2 = 1 + 4 = 5 = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 5xy$ - числа удовлетворяют условию задачи.

Следовательно, число -3 тоже является ответом задачи.

Критерии проверки. Ответы и примеры x, y , когда они достигаются: 2 балла.

Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD равны радиусы окружностей, вписанных во все треугольники ABC, BCD, CDA и DAB. Доказать, что диагонали AC и BD этого четырёхугольника равны.

Доказательство. Обозначим через r радиус окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA и DAB, и подсчитаем площадь S четырёхугольника двумя способами, первым - как сумму площадей треугольников ABC и CDA, и вторым - как сумму площадей треугольников BCD и DAB. В первом случае

$$S = \frac{1}{2}r(AB + BC + AC) + \frac{1}{2}r(AD + CD + AC) = \frac{1}{2}r(AB + BC + CD + AD) + r \cdot AC.$$

Во втором случае $S = \frac{1}{2}r(AB + BD + AD) + \frac{1}{2}r(BC + CD + BD) = \frac{1}{2}r(AB + BC + CD + AD) + r \cdot BD.$ Из

равенства крайних выражений в обоих случаях получаем $AC = BD$, что и требовалось доказать.

9.4. Найти все тройки простых чисел p, q, r таких, что числа $|q - p|, |r - q|, |r - p|$ тоже простые.

Ответ. 2, 5, 7.

Решение. Можно считать, что $p < q < r$. Если $p > 2$, то все числа p, q, r нечётные, а их разности $|q - p|, |r - q|, |r - p|$ - чётны. Тогда $|r - p| = r - p = r - q + q - p \geq 2 + 2 = 4$ не может быть простым числом, что противоречит условию задачи. Следовательно, $p = 2$.

Тогда q и r нечётные простые числа, их разность $r - q$ - чётное простое число, значит $r - q = 2$, то есть $r = q + 2$. В таком случае $q - p = q - 2, q, q + 2$ - три последовательных нечётных числа, следовательно, одно из них должно делиться на 3 (рассмотрение остатков от деления q на 3). Последнее возможно только при $q - 2 = 3$, то есть $q = 5, r = 7$.

Критерии проверки. Только ответы: 2 балла. Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

9.5. В каждой клетке таблицы 5×5 записано одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5 таким образом, что в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей таблицы встречается каждое из чисел от 1 до 5. Какое максимальное значение может принимать сумма пяти чисел, записанных в клетках, отмеченных на рисунке точками?

				•
•				
	•			
		•		
			•	

Ответ. 22.

Решение. Если все 4 числа, отмеченные точкой и не стоящие в правом верхнем углу, различны, то сумма всех чисел, отмеченных точкой, не превосходит $5 + 5 + 4 + 3 + 2 = 19$. Пусть далее среди этих чисел есть два равных, рассмотрим три возможных варианта их расположения. Обозначим вертикали таблицы слева направо буквами a, b, c, d, e , а горизонтали - цифрами от 1 до 5. Диагональ из угла $a1$ в угол $e5$ назовём главной, а диагональ из угла $a5$ в угол $e1$ назовём побочной. Пару рассматриваемых равных чисел обозначим за a .

1) Равны числа в клетках $a4$ и $d1$. Оставшиеся числа, равные a , не могут располагаться в 1-ой и 4-ой горизонталях и в вертикалях a и d , поэтому на побочной диагонали a может стоять только в клетке $c3$. Два оставшихся числа a могут располагаться только в клетках $b5$ и $e2$.

	a			
a				
		a		
				a
			a	

2) Равны числа в клетках $b3$ и $c2$. Оставшиеся числа, равные a , не могут располагаться во 2-ой и 3-ей горизонталях и в вертикалях b и c , поэтому на диагоналях число a может стоять только в угловых клетках и клетке $d4$.

			a	
	a			
		a		

Угловые клетки не могут содержать два равных числа, так как любая пара угловых клеток лежит либо в одной горизонтали, вертикали или диагонали, поэтому одно a стоит в клетке $d4$. Оно исключает клетки главной диагонали, горизонтали 4 и вертикали $d4$, поэтому два оставшихся числа a могут располагаться только в клетках $a5$ и $e1$ побочной диагонали, чего не может быть.

3) Равны числа в клетках $a4$ и $c2$.. Оставшиеся числа, равные a , не могут располагаться в 2-ой и 4-ой горизонталях и в вертикалях a и c , поэтому на диагоналях числа a могут располагаться только в угловых клетках $e1$ и $e5$. лежащих в одной вертикали, что невозможно.

a				
		a		

4) Равны числа в клетках $a4$ и $b3$.. Оставшиеся числа, равные a , не могут располагаться в 3-ей и 4-ой горизонталях и в вертикалях a и b , а на главной диагонали число a должно стоять в клетке $e5$. Тогда на побочной диагонали оно стоит в клетке $d2$, а на первой горизонтали – в клетке $c1$.

				a
a				
	a			
			a	
		a		

Проведённый анализ показывает, что трёх одинаковых чисел или двух пар равных чисел среди 4 чисел, отмеченных точкой и не стоящих в правом верхнем углу, быть не может потому, что допустимые конфигурации случаев 1) и 4) не могут встретиться одновременно. Следовательно, сумма этих четырёх чисел не превосходит $5+5+4+3=17$. а сумма пяти чисел, отмеченных точками, не больше $17+5=22$. Оценка сверху получена.

Пример расстановки чисел, удовлетворяющих условию с суммой, равной 22:

3	4	1	2	5
5	1	3	4	2
4	5	2	1	3
2	3	4	5	1
1	2	5	3	4

Критерии проверки. Любая попытка доказательства неверного ответа: 0 баллов.

Верный ответ с примером: 3 балла. Доказательство максимальности суммы 22: 4 балла.

Если перебор в доказательстве неполный: снижаем баллы пропорционально.