Решения заданий первого этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников 2020-2021 гг.
9 класс
Каждая задача оценивается из 7 баллов

9.1..По кругу сидят рыцари и лжецы – всего 12 человек. Каждый из них сказал фразу: «Все сидящие за столом, кроме, может быть, меня и моих соседей, лжецы». Сколько за столом рыцарей, если рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут?

Ответ. Два.

Решение. Если за столом больше двух рыцарей, то какие-то два из них не соседи и ни один из них не может сказать, что все за столом, кроме, может быть, него и его соседей, лжецы, ибо это будет ложью. Если за столом один рыцарь, то для любого лжеца, соседнего с ним, эта же фраза будет правдой, которую ему говорить не положено. Тоже самое будет верно для любого лжеца, если за столом вообще нет рыцарей.

Если за столом ровно два рыцаря, сидящих рядом, условие задачи выполнено.

Критерии оценивания. Если доказано, что рыцарей может быть только два, но не приведён пример с двумя соседними рыцарями: 4 балла.

9.2..Сергей раскладывает 200 спичек на 6 разных кучек. Боря уравнивает количества спичек в некоторых двух кучках, взяв несколько спичек из большей из них (один раз). Боря стремится взять как можно меньшее количество спичек. Какое максимальное число спичек Сергей может заставить взять Борю?

Ответ. 12.

Решение. Упорядочим кучи по возрастанию, обозначим количества спичек в них за $a_1 \le a_2 \le ... \le a_6$. Естественная стратегия Бори – уравнять две кучи с минимальной разностью d, то есть две кучи с соседними номерами. Если все разности количества спичек в соседних кучах не меньше 13, то $a_1 \ge 1, a_2 \ge 14, a_3 \ge 27, a_4 \ge 40, a_5 \ge 53, a_6 \ge 66$ и сумма $a_1 + a_2 + ... + a_6 \ge 201$. Следовательно, при любом раскладе есть разность не большая 12, поэтому Сергей не сможет заставить Борю взять больше 12 спичек. С другой стороны, если в кучах будут $a_1 = 1, a_2 = 14, a_3 = 27, a_4 = 40, a_5 = 53, a_6 = 65$ спичек, то Боря не сможет взять меньше 12 спичек.

Критерии оценивания. Доказано, что Сергей не сможет заставить Борю взять больше 12 спичек: 4 балла. Пример, когда Боря не сможет взять меньше 12 спичек: 3 балла.

9.3. Найти все тройки различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно их сумме. Наименьшим общим кратным нескольких чисел называется наименьшее натуральное число, делящееся на каждое из этих чисел.

Ответ. Все тройки вида $\{n, 2n, 3n\}$ для произвольного натурального n.

Решение. Обозначим искомые числа за $a < b < c$. По условию их наименьшее общее кратное, равное $a+b+c$, делится на c, поэтому на c делится и сумма $a+b < 2c$. Следовательно, $a+b=c$. Далее, $a+b+c = 2a+2b$ делится на b, поэтому на b делится и $2a < 2b$. Следовательно, $2a = b$ и $c = a+b = 3a$, натуральное число a при этом может быть любым.

С другой стороны, для любой тройки натуральных чисел вида $a = n, b = 2n, c = 3n$, их наименьшее общее кратное равно $6n$. Действительно, оно должно делиться на $3n$, но не равно $3n$, потому, что $3n$ не делится на $2n$, следовательно, оно не меньше $3n \cdot 2 = 6n$. Осталось заметить, что $6n$ делится на каждое из чисел $a = n, b = 2n, c = 3n$.

Критерии оценивания. Только приведён пример троек вида $\{n, 2n, 3n\}$ для произвольного натурального n: 2 балла. Пример для частных n: 1 балл. Доказано, что $a+b=c$: 2 балла.

Доказано, что $2a=b$: 2 балла.

9.4..В треугольнике ABC точка M – середина стороны BC, H – основание высоты, опущенной из вершины B.. Известно, что угол MCA вдвое больше угла MAC, а длина BC равна 10 см. Найти длину отрезка AH.

Ответ. AH=5 см.

Решение. В прямоугольном треугольнике BHC отрезок HM – медиана к гипотенузе, поэтому длина HM равна половине длины BC, то есть 5 см.

Треугольник CHM равнобедренный с HM=MC, поэтому угол MHC равен углу MCH=MCA и вдвое больше угла MAC.

Угол MHC – внешний для треугольника AMH, его величина равна сумме углов MAH и AMH и он вдвое больше MAH=MAC. Следовательно, углы MAH и HMA равны, треугольник AMH равнобедренный, поэтому AH=HM=5 см.

9.5. Докажите, что любые 100 карточек, на которых написано по одной цифре 1, 2 или 3, встречающейся не более чем по 50 раз каждая, можно разложить в один ряд так, чтобы в нём не было фрагментов 11, 22, 33, 123 и 321.

Доказательство. Обозначим число карточек с 1, 2, 3 за a,b,c соответственно, по условию $a,b,c \le 50$ и $a+b+c=100$. Будем располагать карточки в следующем порядке: сначала x пар карточек с 2 и 1, потом y пар карточек с 3 и 1, и z пар карточек с 3 и 2. Значения $x.y,z$ должны удовлетворять системе уравнений: $x+y=a, x+z=b, y+z=c$, решая которую, находим: $x=\dfrac{a+b-c}{2}=50-c, y=\dfrac{a-b+c}{2}=50-b, z=\dfrac{-a+b+c}{2}=50-a$. По условию, все они неотрицательны. Если $y\neq 0$, то запрещённых сочетаний этот ряд не содержит - там сразу нет соседних карточек с равными числами, а фрагменты из трёх карточек таковы 121, 212, 213,131,313,132,323,232. Если $y=0$, то фрагменты из трёх карточек 121, 212, 213, ,132,323,232.