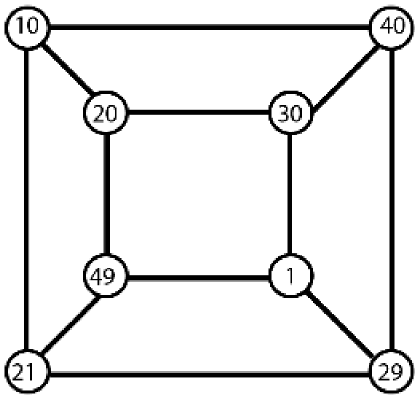
Решения и критерии проверки задач первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Петя расставил в вершинах куба 8 различных чисел, после чего Вася в центре каждой грани записал сумму чисел в вершинах этой грани. Все шесть васиных чисел оказались равны между собой. Приведите пример, как такое могло быть.

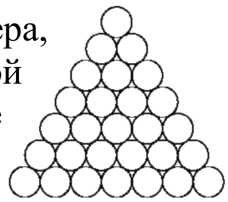


Решение: Подходит, например, расстановка изображённая на рисунке (кружками обозначены вершины куба, отрезками – его рёбра).
Легко проверить, что сумма чисел на любой грани равна 100
Критерии: Любой верный пример без проверки – 7 баллов.

8.2. Утёнок с гусёнком соревновались в триатлоне. Дистанция состояла из одинаковых по длине участков бега, плавания и полета. Утёнок бежал, плыл и летел с одинаковой скоростью. Гусёнок бежал вдвое медленнее утёнка, зато плыл вдвое быстрее. Кто и во сколько раз быстрее летел, если и стартовали, и финишировали они одновременно?

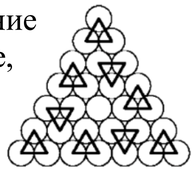
Ответ: Гусёнок летел быстрее в 2 раза.
Решение: Примем время, потраченное утёнком на каждый участок дистанции, за двойку. Тогда время, потраченное гусёнком на бег и на плавание, составляет 4 и 1 соответственно. Следовательно, на полёт у него ушло $6 - 4 - 1 = 1$, т.е. летел он в 2 раза быстрее утёнка.
Критерии: Только ответ – ноль баллов.
Только ответ с проверкой, что такое могло быть – 1 балл.

8.3. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера, но, возможно, разной массы (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.

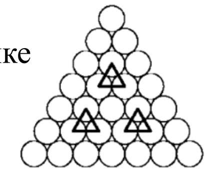


Ответ: 60 г.
Решение 1: Возьмём ромбик из 4 монет. Как видно из рис., массы двух не касающихся друг друга монет в нём равны. Рассматривая такие ромбики, получаем, что если покрасить монеты в 3 цвета, как на рис., то монеты одного цвета будут иметь одинаковую массу.Теперь легко найти и сумму масс монет на границе: там имеется по 6 монет каждого цвета, а сумма масс трёх разноцветных монет равна 10 г; значит, суммарная масса монет на границе равна $6 \cdot 10 = 60$ г.

Решение 2: Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек, а все внутренние монеты без центральной — на 3 тройки. Значит, монеты на границе весят столько же, сколько 9-3=6 троек, т.е. 60 г.



Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Рассмотрены ромбики и показано, что в них две монеты имеют одну массу – 2 балла.
В дополнение к этому доказано, что веса во всём треугольнике имеют вид как на рисунке (сделана раскраска, но дальнейших продвижений нет) – ещё 2 балла.



8.4. Какое наибольшее количество непересекающихся диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике (допускаются диагонали, имеющие общую вершину)?

Ответ: n - 3
Решение: Каждая проведённая диагональ увеличивает число многоугольников-частей на 1. Поэтому проведя k непересекающихся диагоналей, мы разрежем n-угольник на $k + 1$ многоугольников. Оценим их количество.

Первый способ. Общее число сторон получившихся частей равно $n + 2k$ (каждая диагональ является стороной двух многоугольников). У каждого многоугольника не меньше трёх сторон. Поэтому $n + 2k \geq 3(k + 1)$, то есть $k \leq n - 3$.

Второй способ. Общая сумма углов получившихся частей равна сумме углов исходного n-угольника, то есть $(n - 2)\cdot 180°$. Сумма углов каждого многоугольника не меньше 180°. Поэтому $n - 2 \geq k + 1$, то есть $k \leq n - 3$.

Пример с $n - 3$ диагоналями можно получить, если разрезать n-угольник на треугольники (например, провести все диагонали, выходящие из одной вершины).
Критерии: Только пример на $n - 3$ диагонали – 1 балл.

8.5. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных натуральными числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка (например, мешок “2, 3, 6” хороший, а “4, 5, 10” – нет). Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

Ответ: 8.
Решение: В каждом хорошем мешке не менее трёх бочонков. Наименьший номер в каждом хорошем мешке должен быть однозначным, иначе наибольший номер в этом мешке не меньше $10 \times 11 = 110$, что невозможно. По тем же соображениям если в хорошем мешке есть бочонок с номером 1, то в нем должен быть еще один бочонок с однозначным номером. Поэтому количество хороших мешков не превосходит 8.
С другой стороны, можно привести пример, когда хороших мешков ровно 8. Соберем 8 хороших мешков (2, 17, 34), (3, 16, 48), (4, 15, 60), (5, 14, 70), (6, 13, 78), (7, 12, 84), (8, 11, 88) и (9, 10, 90). Все неуказанные номера поместим в какой-то отдельный мешок, не являющийся хорошим.
Критерии: Только пример – 3 балла.
Только оценка – 3 балла.
Только замечено, что в каждом мешке должен быть однозначный номер – 1 балл, может суммироваться с примером.