Решения и критерии проверки задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Из квадрата 5 на 5 вырезана угловая клетка. Разрежьте его по линиям сетки на шесть многоугольников равной площади таким образом, чтобы среди них была ровно одна пара одинаковых.

2	2	1	1	
2	2	3	1	1
4	3	3	3	5
4	4	5	5	5
4	6	6	6	6

Решение: Пример разрезания приведён на рисунке

Критерии: Любой верный пример – 7 баллов.

Нет верного примера, но доказано, что повторяется Т-образная фигурка – 1 балл.

Замечание: Несложно заметить, что всего существует пять различных многоугольников площади 4, значит, в верном примере каждый, кроме одного, встречается ровно 1 раз. Кроме того, если раскрасить доску и фигурки в шахматную раскраску, можно доказать, что повторяться должна в точности Т-образная фигурка.

8.2. В сказочной стране каждый поросёнок либо всегда врёт, либо всегда говорит правду, причём каждому поросёнку достоверно известно про каждого, лжец ли он. Однажды Ниф-Ниф, Наф-Наф и Нуф-Нуф встретились за чашечкой чая, и двое из них сделали по заявлению, однако, неизвестно, кто именно что произнёс. Один из трёх поросят сказал: “Ниф-Ниф и Наф-Наф оба всегда врут”. Другой: “Ниф-Ниф и Нуф-Нуф оба всегда врут”. Определите, сколько врунов среди трёх поросят.

Ответ: Два

Решение: Если хотя бы одно из высказываний верно, то упомянутые в нём поросята являются лжецами, а значит, лжецов хотя бы два. При этом говорящий это верное утверждение должен говорить правду. Значит лжецов не больше двух. Итого, если хотя бы одна из сказанных фраз верна, то лжецов двое. Отметим, что это возможно, если, например, первую фразу говорит Нуф-Нуф.

Если оба высказывания не верны, то говорящие их – лжецы. А значит, лжецов хотя бы два. При этом в каждой фразе, чтобы она была ложной, должен быть упомянут хотя бы один честный поросёнок. Значит, он есть, то есть лжецов не более двух. Таким образом, и в этом случае лжецов ровно два. Отметим, что и эта ситуация возможна, если единственным честным поросёнком является Ниф-Ниф и он молчит.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Пример, что врунов может быть 2, других продвижений нет – 1 балл.

Переборное решение, в котором пропущены случаи – не более 4 баллов.

За отсутствие проверки, что врунов действительно может быть два, баллы не снимать.

8.3. В городе живут четыре ювелира, которым царь выслал 13 мешков с золотом. В первом мешке лежал один слиток золота, во втором – два, в третьем – три, …, в тринадцатом – 13 золотых слитков. Один из мешков сразу куда-то потерялся, а оставшиеся ювелиры распределили так, что каждому досталось и равное количество золотых слитков, и равное количество мешков. При этом мешок с одним слитком достался первому ювелиру, с тремя – второму, с одиннадцатью – третьему. Определите, какие мешки достались четвёртому ювелиру, если слитки из мешков не доставали.

Ответ: 2, 9, 10
Решение: Всего слитков было 1+2+3+...+13 = 91. Когда один мешок потерялся, то оставшееся число слитков стало кратно 4. Число 91 даёт остаток 3 при делении на 4, то есть потерялся мешок либо с 3, либо с 7, либо с 11 слитками. Из условия знаем, что мешки с 3 и 11 слитками на месте, значит, потерялось 7 слитков, и их осталось 84.
Значит, каждому ювелиру досталось по 21 слитку и по 3 мешка.
Первому ювелиру нужно два мешка, в которых суммарно будет 20 слитков (так как один мешок с одним слитком у него уже есть). Это можно сделать одним из следующих способов: 13+7 (но 7 слитков потеряли), 12+8, 11+9 (но 11 у другого ювелира). Значит, у первого мешки с 1, 8 и 12 слитками.
Второму ювелиру до 21 слитка не хватает 18. Это количество с помощью двух мешков можно набрать так: 13+5, 12+6 (но 12 слитков у первого), 11+7 (но 7 слитков потерялись), 10+8 (но 8 слитков у первого). Значит, у второго в мешках 3, 5 и 13 слитков.
Третьему ювелиру до 21 слитка не хватает ещё 10. Это количество с помощью двух мешков можно набрать так: 9+1 (но 1 слиток у первого), 8+2 (но 8 слитков у первого), 7+3 (но 7 слитков потерялись), 6+4. Значит, у третьего в мешках 4, 6, 11 слитков.
Таким образом, остались только мешки с 2, 9, 10 слитками, которые и достались четвёртому ювелиру.
Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Пример, в котором для каждого ювелира расписано, кому какой мешок достался, других продвижений нет – 1 балл. Этот балл не суммируется с остальными.
Доказано, что потерялся мешок с 7 слитками – 1 балл.
Доказано, что ювелиру достались определённые мешки – по 2 балла за каждого. Эти баллы суммируются друг с другом и предыдущим пунктом.

8.4. На отрезке AB выбрали точку M и построили равнобедренные треугольники AMC и MBN с основаниями AM и MB соответственно. Оказалось, что точки B, N и C лежат на одной прямой, а $AB = BC$. Перпендикуляр к отрезку AC, опущенный из B, пересекает отрезок CM в точке H. Докажите, что NH – биссектриса угла MNC.

Решение: Треугольник ABC равнобедренный. Пусть его углы при основании равны x, а оставшийся угол y. Таким образом, $2x + y = 180°$.
Треугольник AMC равнобедренный, значит, $\angle AMC = \angle CAM = x$.
Треугольник MNB равнобедренный, значит, $\angle MBN = \angle BMN = y$.
Так как точки A, M, B лежат на прямой, то $\angle AMC + \angle CMN + \angle NMB = 180°$. Из этого следует, что , $x + \angle CMN + y = 180° = 2x + y$. Значит, $\angle CMN = x$.
Итак, MC – биссектриса внешнего угла $\angle AMN$ треугольника BMN. Прямая BH содержит высоту равнобедренного треугольника ABC, проведённую к основанию, а значит, является биссектрисой $\angle MBN$ треугольника MBN. Следовательно, H – центр

вневписанной окружности треугольника MBN, так как является точкой пересечения биссектрисы внешнего и биссектрисы внутреннего угла этого треугольника. Значит, и биссектриса внешнего угла $\angle MNC$ треугольника MBN проходит через точку H. Таким образом, NH – биссектриса угла $\angle MNC$.

Критерии: Доказано, что $\angle CMN = \angle AMC$ – 2 балла.

То, что три биссектрисы, из которых две внешние, пересекаются в одной точке, считать общеизвестным фактом.

Замечание: Доказательство того, что две внешних биссектрисы и одна внутренняя пересекаются в одной точке, проводится точно так же, как и для трёх внутренних биссектрис. Достаточно рассмотреть их как ГМТ, равноудалённых от сторон угла.

8.5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромах стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёте на один из островов, а затем проплыть на $n-1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёте можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

Решение 1: Уберём все паромы, а затем начнём запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (первым запустим самый дешёвый, вторым – самый дешёвый из остальных, и т. д.). В каждый момент в каждом острове будем писать максимальное количество паромов, на которых можно последовательно проехать, начав от этого острова, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.

В начальный момент все числа на островах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим паром, соединяющий острова A и B, в которых до этого были написаны числа a и b соответственно. После введения нового парома в A будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из A можно проехать новым паромом в B, а затем по маршруту длины b, начинавшемуся из B). Аналогично, в B будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в A и B увеличится хотя бы на 2, а числа на остальных островах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел на островах увеличится хотя бы на 2.

Таким образом, когда все паромы будут введены, сумма чисел на островах станет не меньше, чем $n(n-1)$. Значит, хотя бы на одном острове будет число, не меньшее $n-1$. Это и означает наличие требуемого маршрута от этого острова.

Решение 2. Разделим каждый паром, курсирующий между A и B, на два – идущий из A в B и идущий из B в A. Получится $n(n-1)$ полупаромов. Мы построим n выделенных маршрутов (по одному, начинающемуся от каждого острова) так, чтобы цена поездки на каждом монотонно убывала, и каждый полупаром содержался бы хотя бы в одном выделенном маршруте. Тогда один из выделенных маршрутов будет содержать не менее $n-1$ полупарома, что нам и требуется.

Выделенный маршрут, начинающийся от произвольного острова A, выглядит так. Пусть $A_0 = A$. Рассмотрим все полупаромы A_0X, выходящие из A_0, и выберем из них полупаром A_0A_1 максимальной цены a_1. Затем рассмотрим все полупаромы A_1Y, выходящие из A_1, цена которых меньше a_1; если такие есть, выберем из них полупаром

A_1A_2 максимальной цены a_2, и т. д. Маршрут заканчивается полупаромом $A_{k-1}A_k$, если из A_k не выходит полупаром с ценой, меньшей a_k.
Осталось показать, что каждый полупаром BC попадёт хотя бы в один из выделенных маршрутов. Положим $B_1 = B$, $B_0 = C$, и пусть b_1 – цена BC. Рассмотрим все полупаромы XB_1, ведущие в B_1, с ценой, большей b_1. Если такие есть, то выберем из них полупаром B_2B_1 наименьшей цены b_2. Далее рассмотрим все полупаромы YB_2, ведущие в B_2, с ценой, большей b_2. Выберем из них полупаром B_3B_2 наименьшей цены b_3, и т. д. Этот процесс выбора закончится, когда при некотором k полупаром B_kB_{k-1} – это полупаром максимальной цены, выходящий из B_k. Согласно нашему построению, выделенный маршрут, выходящий из B_k, последовательно пройдёт через B_{k-1}, ..., B_1, B_0, то есть будет содержать полупаром BC.