Решения и критерии проверки задач второго этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Придумайте хотя бы одно трёхзначное число ПАУ (все цифры различны), что (П+А+У)×П×А×У = 300 (достаточно привести один пример)

Решение: Подходит, например, ПАУ = 235. Существуют и другие примеры.
Критерии: Любой верный пример – 7 баллов.

7.2. Ученики седьмого класса посылают друг другу новогодние стикеры в Телеграме. Известно, что ровно 26 человек получили хотя бы один стикер, ровно 25 – хотя бы два стикера, …, ровно 1 – хотя бы 26 стикеров. Сколько стикеров получили ученики этого класса в сумме, если известно, что больше 26 стикеров не получил никто? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Ответ: 351
Решение: Заметим, что ровно 1 стикер получил один человек, так как именно в нём разница между теми, кто получил хотя бы 1 и хотя бы 2. Аналогично один человек получил ровно 2, 3, …, 26 стикеров, то есть всего стикеров 1 + … + 26 = 351
Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Ответ с проверкой, что такое возможно – 1 балл.
Ответ записан в незамкнутой форме (оставлено многоточие) или арифметическая ошибка – минус 1 балл.

7.3. Имеются сломанные чашечные весы. Чаши весов находятся в равновесии, если вес на правой чаше равен утроенному весу на левой чаше. Правая чаша перевешивает, если вес на ней больше утроенного веса на левой чаше. Левая чаша перевешивает, если утроенный вес на ней больше веса на правой чаше. Как с помощью этих весов за два взвешивания найти фальшивую монету из 7 данных, если известно, что все 6 настоящих монет весят одинаково, а фальшивая легче остальных?

Решение: Пронумеруем монеты от 1 до 7 и при первом взвешивании положим на левую чашу монету 1, а на правую – 2, 3 и 4. Рассмотрим варианты:
1) Перевесила правая чаша. Тогда фальшивка под номером 1.
2) Перевесила левая чаша. Тогда фальшивка среди 2, 3 и 4. Положим теперь на левую чашу 2, а на правую – 3, 5 и 6
    a. Весы в равновесии. Тогда фальшивка номер 4.
    b. Перевесила правая чаша. Тогда фальшивка номер 2
    c. Перевесила левая. Тогда фальшивка номер 3.
3) Весы в равновесии. Тогда фальшивка среди 5, 6 и 7. Применим тот же алгоритм, что и в предыдущем пункте

Критерии: первое верное взвешивание без дальнейших продвижений — 0 баллов.

пропущен случай равенства (или один из случаев неравенства), остальное верно — 3 баллов.

7.4. Всеволод некоторым образом расставил в вершинах куба числа, равные единице или минус единице. После этого Ярослав подсчитал для каждой грани произведение чисел в вершинах этой грани. Может ли оказаться, что сумма восьми чисел Всеволода и шести чисел Ярослава равна нулю?

Ответ: нет

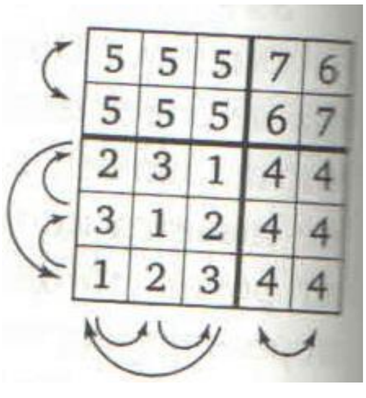
Решение: Произведение всех 14 чисел равно четвёртой степени произведения чисел в вершинах (потому что каждое число учитывается четырежды) и потому положительно. Следовательно, среди 14 чисел чётное количество минус единиц, а их сумма равна 0, только когда минус единиц ровно 7.

Критерии: Доказано, что произведение всех чисел положительно – 3 балла.

7.5. Каждая клетка таблицы 5 × 5 раскрашена в один из нескольких цветов. Лада перемешала строки этой таблицы между собой таким образом, что ни одна строка не осталась на прежнем месте. Затем Лера перемешала столбцы так, чтобы ни один столбец не остался на прежнем месте. С удивлением девочки заметили, что получилась такая же таблица, какая была изначально. В какое наибольшее число различных цветов может быть покрашена эта таблица?

Ответ: 7.

Решение: Перенумеруем цвета и будем рассуждать про числа вместо этого. Как столбцы, так и строки могли переставляться циклически или разбиваться на циклические пару и тройку. Если использовалась циклическая перестановка столбцов, то все столбцы состоят из одного и того же набора чисел, т.е. различных чисел не более пяти. Аналогична ситуация при циклической перестановке строк.



Если же было использовано разбиение как столбцов, так и строк на пару и тройку, то таблицу можно условно разбить на квадраты 2 × 2 и 3 × 3, а также прямоугольники 2 × 3 и 3 × 2, в каждом из которых и столбцы, и строки переставляются циклически. В квадратах может быть не более двух и трёх различных чисел соответственно (потому что набор чисел в каждом столбце совпадает), а в прямоугольниках – не более одного (поскольку как в столбцах, так и в строках должен быть одинаковый набор чисел).

Пример для семи чисел см. на рисунке.

Критерии: Только оценка – 3 балла

Только пример – 3 балла.