Решения и критерии проверки задач первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Антон испёк такой торт, который Арина смогла разделить одним прямолинейным разрезом на 4 части. Как такое могло быть? *(достаточно привести один пример)*

Решение: Подходит, например, торт в форме буквы Ш, у которого отрезаются все вертикальные палки. Существует множество других возможных примеров.
Критерии: Любой верный пример – 7 баллов.

7.2. Сева написал на доске верное равенство, а Юра заменил в нём все цифры на буквы, причём разные цифры он заменил на разные буквы, а одинаковые – на одинаковые. В результате на доске оказалось записано

Я + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН + ОН = МЫ.

(Всего восемь слагаемых “ОН”). Какое равенство могло быть записано изначально? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Ответ: Я = 0, ОН = 12, МЫ = 96.
Решение: Заметим, что ОН < 13, так как 13 * 8 = 104 – уже трёхзначное число. Кроме того, ОН не равно 11, так как разные буквы обозначают разные цифры. Если ОН = 10, то записано равенство Я + 80 = МЫ, но тогда Ы = Я.
Значит, ОН = 12, а равенство имеет вид Я + 96 = МЫ. Я не равно 1 и 2, потому что эти цифры уже заняты. Кроме того, если Я = 3, то МЫ = 99, что тоже невозможно. Если Я > 3, то МЫ должно быть трёхзначным. Значит, Я = 0, МЫ = 96.
Критерии: Только верный ответ – 2 балла.
Доказано, что ОН < 13 – 2 балла.
Доказано, что ОН = 12 – 2 балла.
Доказано, что Я = 0 – 3 балла.
Баллы за последние три пункта суммируются.
Если ученик считал, что все числа должны быть положительны (получил, что Я = 0 и сказал, что решений нет) – баллы не снимать при условии, что проверено, что Я = 0 подходит.
Если не проверено – снимать 1 балл.

7.3. За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; всё что угодно, если слева от него сидит чудак. Каждый из сидящих за столом сказал: “Справа от меня сидит лжец”. Сколько всего лжецов может находиться за столом? *(найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Ответ: 0 или 50 лжецов.

Решение: Если за столом есть лжец, тогда справа от лжеца – чудак или рыцарь. В такой ситуации оба они говорят правду, значит, следующий после них – снова лжец. Получаем, что лжецы и не лжецы чередуются, т.е. лжецов ровно половина.

Если же лжецов за столом нет, то рыцарей тоже нет (потому что справа от рыцаря должен быть лжец), и за столом одни чудаки, и такой вариант тоже возможен.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Только ответ 50 с примером, что такое может быть – 1 балл.

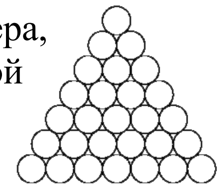
Только ответ 0 с примером, что такое может быть – 1 балл (складывается с предыдущим).

Рассмотрен только случай, когда лжецы есть – 5 баллов.

Рассмотрен только случай, когда лжецов нет – 2 балла.

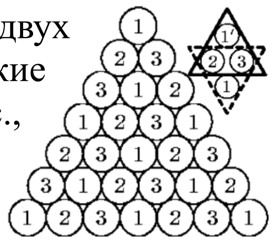
В полном решении сказано, что лжецов может быть 0, но не показано, что такой пример действительно возможен – минус 1 балл.

7.4. На столе в виде треугольника выложены 28 монет одинакового размера, но, возможно, разной массы (рис.). Известно, что суммарная масса любой тройки монет, которые попарно касаются друг друга, равна 10 г. Найдите суммарную массу всех 18 монет на границе треугольника.



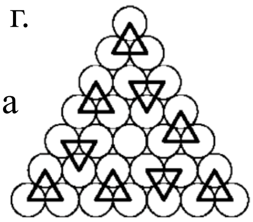
Ответ: 60 г.

Решение 1: Возьмём ромбик из 4 монет. Как видно из рис., массы двух не касающихся друг друга монет в нём равны. Рассматривая такие ромбики, получаем, что если покрасить монеты в 3 цвета, как на рис., то монеты одного цвета будут иметь одинаковую массу.



Теперь легко найти и сумму масс монет на границе: там имеется по 6 монет каждого цвета, а сумма масс трёх разноцветных монет равна 10 г; значит, суммарная масса монет на границе равна $6 \cdot 10 = 60$ г.

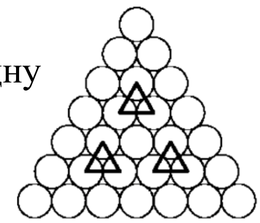
Решение 2: Все монеты без центральной можно разбить на 9 троек, а все внутренние монеты без центральной — на 3 тройки. Значит, монеты на границе весят столько же, сколько 9-3=6 троек, т.е. 60 г.



Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Рассмотрены ромбики и показано, что в них две монеты имеют одну массу – 2 балла.

В дополнение к этому доказано, что веса во всём треугольнике имеют вид как на рисунке (сделана раскраска, но дальнейших продвижений нет) – ещё 2 балла.



7.5. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных натуральными числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка (например, мешок “2, 3, 6” хороший, а “4, 5, 10” – нет). Каково наибольшее возможное количество хороших мешков?

Ответ: 8.
Решение: В каждом хорошем мешке не менее трёх бочонков. Наименьший номер в каждом хорошем мешке должен быть однозначным, иначе наибольший номер в этом мешке не меньше $10 \times 11 = 110$, что невозможно. По тем же соображениям если в хорошем мешке есть бочонок с номером 1, то в нем должен быть еще один бочонок с однозначным номером. Поэтому количество хороших мешков не превосходит 8.
С другой стороны, можно привести пример, когда хороших мешков ровно 8. Соберем 8 хороших мешков (2, 17, 34), (3, 16, 48), (4, 15, 60), (5, 14, 70), (6, 13, 78), (7, 12, 84), (8, 11, 88) и (9, 10, 90). Все неуказанные номера поместим в какой-то отдельный мешок, не являющийся хорошим.
Критерии: Только пример – 3 балла.
Только оценка – 3 балла.
Только замечено, что в каждом мешке должен быть однозначный номер – 1 балл, может суммироваться с примером.