Решения и критерии проверки задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2020-2021 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Приведите пример натурального числа, кратного 2020, такого, что его сумма цифр тоже кратна 2020.

Решение: Подходит, например, число 20202020...2020, в котором фрагмент 2020 повторяется 505 раз. Такое число, очевидно, делится на 2020, а сумма его цифр равна $505 \times 4 = 2020$.
Критерии: Любой правильный ответ с проверкой или без – 7 баллов.
Верно придумана концепция примера, но ошибка в вычислениях (например, 2020 повторяется 500 раз) – 3 балла.

7.2. Лада и Лера нарисовали по треугольнику. Лада выбрала два угла своего треугольника, и Лера заметила, что среди углов её треугольника есть равный сумме этих двух углов. После этого Лада выбрала другую пару углов в своём треугольнике, а Лера снова нашла у своего угол, равный сумме углов этой пары. Докажите, что Лада нарисовала равнобедренный треугольник.

Решение: Заметим, что в двух парах углов, выбранных Ладой, есть ровно один общий (иначе в треугольнике было бы хотя бы 4 угла). Назовём угол, который участвует в обеих парах, α, а два других угла треугольника Лады β и γ. В треугольнике Леры есть угол, равный $\alpha + \beta$, и угол, равный $\alpha + \gamma$. Если это два разных угла, то их сумма равна $\alpha + \beta + \alpha + \gamma = 180° + \alpha$ (так как в треугольнике Лады сумма углов равна $\alpha + \beta + \gamma = 180°$), что больше 180°. Это невозможно, значит, это один и тот же угол, откуда следует $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, поэтому $\beta = \gamma$, то есть, треугольник равнобедренный.

7.3. В некотором городе есть улица в форме правильного шестиугольника, в каждой из вершин которого живёт человек. Любой житель этой улицы является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из них знает своих соседей и имена остальных (но не знает, где они живут), однако, никто ни про кого не знает, рыцарь он или лжец. Однажды Лёшка, живущий в одной из вершин, решил узнать, кто живёт в противоположном от него доме. Он может отправить письмо на имя любого человека и спросить: “Верно ли, что ты соседствуешь с тем-то?”, на что получит ответ “Да” или “Нет”. После этого он может отправить следующее письмо, возможно, другому человеку с вопросом про другого, и т. д. Как Лёшка может осуществить задуманное, если он собирается отправить не более четырёх писем?

Решение: Пусть остальных людей зовут A, B, C, D, E, при этом Лёшка знает, что его соседей зовут A и E. Пусть тогда он пошлёт людям B и C по два письма с вопросами о людях A и E.
Если на оба письма человек отвечает: “Да”, – он врёт, так как одновременно рядом с A и D живёт только сам Лёшка. Значит, отвечающий так живёт напротив Лёшки.

Действительно, если бы он там не жил, то соседствовал бы с A или E, и на один из вопросов соврал бы и ответил “Нет”.
Если на оба письма человек отвечает: “Нет”, – он говорит правду. Действительно, если бы он врал, то должен был бы жить рядом и с A, и с E, то есть обязан был бы быть Лёшкой. А если человек не сосед ни A, ни E, то он живёт напротив Лёшки.
Таким образом, если кто-то на оба письма ответил одинаково, то Лёшка удовлетворил своё любопытство.
Если человек отвечает на одно письмо утвердительно, а на другое отрицательно, то он обязательно сосед либо A, либо E. Действительно, если он рыцарь, то он написал правду, когда отвечал утвердительно, а если лжец, то соврал, когда отвечал отрицательно. Таким образом, если оба адресата дали пару разных ответов на вопросы Лёшки, то никто из них не живёт напротив него. В этом случае Лёшка понимает, что напротив него живёт человек D.
Критерии: Только алгоритм без обоснования – 3 балла.
Решение с пропущенными случаями – не более 5 баллов.

7.4. Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый догоняет второго – это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз первый пловец может быть быстрее второго? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: В 3/2, 5/3 или 5 раз.
Решение: Когда первый пловец переплывал бассейн в одну сторону (а это происходило 20 раз), он встречал второго ровно один раз (возможно, у бортика). Встреча в момент старта не учитывается, поэтому встреч было 19 минус количество встреч у бортиков до финиша первого – такая встреча в нашем подсчёте учитывалась дважды. При этом встреча в момент финиша первого пловца потери не даёт.
Значит, во время заплыва пловцы встречались у бортиков трижды. Рассмотрим момент первой такой встречи. К этому времени первый проплыл какое-то целое число a бассейнов, а второй целое число b. Тогда скорости пловцов относятся как a/b. Сократим эту дробь и будем считать, что скорости относятся как p/q.
Если p и q нечётны, то при проплывании первым p бассейнов, второй оказывается у того же бортика, то есть, происходит встреча, и далее они повторяются через такие же промежутки. Отсюда следует, что $3p < 20$ (через три встречи первый не мог закончить, так как $3p$ нечётное) и $20 \leq 4p$, так как встреч было максимум 4, считая момент финиша первого. Значит, $p = 5$, и $q = 1$ или $q = 3$. Несложно проверить, что обе дроби 5/1 и 5/3 подходят.
Если же p и q имеют разную чётность, то в момент проплывания первым p бассейнов, они со вторым находятся у противоположных бортиков, и встреча, собственно, у бортика произойдёт, когда первый проплывёт $2p$, $4p$, $6p$… бассейнов. Значит, чтобы встреч было всего три, $6p \leq 20 < 8p$, откуда $p = 3$, $q = 2$.
Критерии:
Только ответ – 0 баллов.

Ответ с проверкой, других продвижений нет – 1 балл. Этот балл не суммируется с остальными.
Доказано, что пловцы встречались у бортиков трижды – 1 балла.
Доказано, что скорости относятся как дробь – ещё 1 балл.
Верно рассмотрен один из случаев в решении – ещё 3 балла.
Верно рассмотрен второй – ещё 2 балла.
За отсутствие проверки того, что отношения подходят, баллы не снимать.

7.5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромах стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёте на один из островов, а затем проплыть на $n-1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёте можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.

Решение 1: Уберём все паромы, а затем начнём запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (первым запустим самый дешёвый, вторым – самый дешёвый из остальных, и т. д.). В каждый момент в каждом острове будем писать максимальное количество паромов, на которых можно последовательно проехать, начав от этого острова, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.
В начальный момент все числа на островах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим паром, соединяющий острова А и В, в которых до этого были написаны числа a и b соответственно. После введения нового парома в А будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из А можно проехать новым паромом в В, а затем по маршруту длины b, начинавшемуся из В). Аналогично, в В будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в А и В увеличится хотя бы на 2, а числа на остальных островах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел на островах увеличится хотя бы на 2.
Таким образом, когда все паромы будут введены, сумма чисел на островах станет не меньше, чем $n(n-1)$. Значит, хотя бы на одном острове будет число, не меньшее $n-1$. Это и означает наличие требуемого маршрута от этого острова.
Решение 2. Разделим каждый паром, курсирующий между А и В, на два – идущий из А в В и идущий из В в А. Получится $n(n-1)$ полупаромов. Мы построим n выделенных маршрутов (по одному, начинающемуся от каждого острова) так, чтобы цена поездки на каждом монотонно убывала, и каждый полупаром содержался бы хотя бы в одном выделенном маршруте. Тогда один из выделенных маршрутов будет содержать не менее $n-1$ полупарома, что нам и требуется.
Выделенный маршрут, начинающийся от произвольного острова А, выглядит так. Пусть $A_0 = A$. Рассмотрим все полупаромы A_0X, выходящие из A_0, и выберем из них полупаром A_0A_1 максимальной цены a_1. Затем рассмотрим все полупаромы A_1Y, выходящие из A_1, цена которых меньше a_1; если такие есть, выберем из них полупаром A_1A_2 максимальной цены a_2, и т. д. Маршрут заканчивается полупаромом $A_{k-1}A_k$, если из A_k не выходит полупаром с ценой, меньшей a_k.

Осталось показать, что каждый полупаром BC попадёт хотя бы в один из выделенных маршрутов. Положим $B_1 = B$, $B_0 = C$, и пусть b_1 – цена BC. Рассмотрим все полупаромы XB_1, ведущие в B_1, с ценой, большей b_1. Если такие есть, то выберем из них полупаром B_2B_1 наименьшей цены b_2. Далее рассмотрим все полупаромы YB_2, ведущие в B_2, с ценой, большей b_2. Выберем из них полупаром B_3B_2 наименьшей цены b_3, и т. д. Этот процесс выбора закончится, когда при некотором k полупаром B_kB_{k-1} – это полупаром максимальной цены, выходящий из B_k. Согласно нашему построению, выделенный маршрут, выходящий из B_k, последовательно пройдёт через B_{k-1}, ..., B_1, B_0, то есть будет содержать полупаром BC.