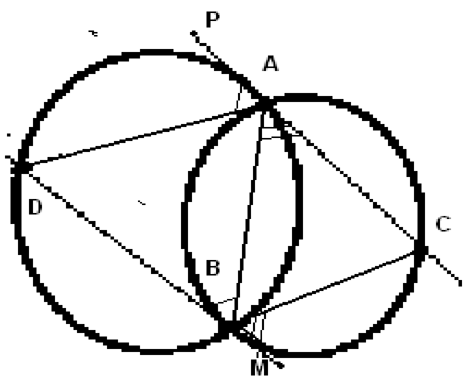
11 класс

11.1. На окружности расставлены четыре числа, сумма которых равна нулю. Для каждой пары соседних чисел нашли их произведение и полученные четыре числа просуммировали. Может ли полученная сумма быть положительной?
Ответ. Нет, не может.
Решение. Обозначим расставленные числа за a, b, c, d, по условию $a + b + c + d = 0$. Тогда $ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(c+a)=(a+c)(b+d)=-(a+c)^2 \le 0$.

11.2. Пусть n – натуральное число, не заканчивающееся на 0, и $R(n)$– четырёхзначное число, получающееся из n изменением порядка следования его цифр на обратный, например $R(3257) = 7523$: Найти все натуральные четырёхзначные числа n такие, что $R(n) = 4n + 3$.
Ответ. 1997.
Решение. Рассмотрим десятичную запись исходного четырёхзначного числа $n = \overline{abcd}$, тогда $R(n) = \overline{dcba} = 4n + 3$ - тоже четырёхзначное число. Следовательно, $4a \le 9$, поэтому $a = 1$ или $a = 2$. Кроме того, число $R(n) = \overline{dcba} = 4n + 3$ является нечётным и оканчивается на a, значит $a = 1$. Если число $4n + 3$ оканчивается на 1, то n должно оканчиваться на 2 или 7. то есть $d = 2$ или $d = 7$. Первое невозможно, так как $d \ge 4a \ge 4$, поэтому $d = 7$.
Подставляем найденные значения в равенство из условия: $R(n) = 4 \cdot \overline{abcd} + 3 = 4031 + 400b + 40c = 7001 + 100c + 10b$, откуда $13b - 2c = 99$. Отсюда $b \ge \frac{99}{13} = 7\frac{8}{13}$, то есть $b = 8$ или $b = 9$. При $b = 8$ левая часть равенства $13b - 2c = 99$ чётна, что невозможно, следовательно $b = 9$ и $c = 9$.
Критерии проверки. Ответ: 2 балла. Доказательство, что других ответов нет: 5 баллов.

11.3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A провели касательную к первой окружности, пересекающую вторую в точке C. Через точку B провели касательную ко второй окружности, пересекающую первую в точке D. Найти угол между прямыми AD и BC.
Ответ. Прямые параллельны, угол равен 0º.
Решение. Отметим точку P на продолжении CA за точку A и точку M на продолжении DB за точку B. Вписанный в первую окружность и опирающийся на хорду AD угол ABD равен углу PAD между хордой AD и касательной AC к первой окружности. Вписанный во вторую окружность и опирающийся на хорду BC угол CAB равен углу CBM между хордой BC и касательной BD ко второй окружности. Тогда угол BAD между секущей прямой AB и прямой AD равен разности 180º и суммы углов PAD и CAB, что равно разности 180º и суммы углов ABD и CBM, то есть углу ABC между секущей прямой AB и прямой BC. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.



Критерии проверки. Только ответ: 0 баллов.

11.4. Последовательность натуральных чисел $a_n, n = 1,2,\ldots$ такова, что $a_1 = 1$ и $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$ для всех $n = 2,3,\ldots$. Найти формулу «общего члена последовательности», то есть формулу, явно выражающую a_n через n при произвольном n.

Ответ. $a_n = (n+1)2^{n-2}$

Решение. Найдём несколько первых членов последовательности: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{1}\cdot 1 = 3\cdot 1$, $a_3 = \frac{4}{2}\cdot(1+3) = 8 = 4\cdot 2$, $a_4 = \frac{5}{3}\cdot(1+3+8) = 20 = 5\cdot 4$ и сделаем предположение о том, что $a_n = (n+1)2^{n-2}$. Также вычислим суммы первых членов этой последовательности: $s_1 = a_1 = 1$, $s_2 = a_1 + a_2 = 1+3 = 4 = 2\cdot 2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1+3+8 = 12 = 3\cdot 4$ $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1+3+8+20 = 32 = 4\cdot 8$, и сделаем предположение о том, что $s_n = n\cdot 2^{n-1}$.

Докажем сделанные предположения методом математической индукции. Во первых. $a_{n+1} = \frac{n+2}{n}\cdot s_n = \frac{n+2}{n}\cdot n\cdot 2^{n-1} = (n+2)\cdot 2^{n-1} = ((n+1)+1)\cdot 2^{(n+1)-2}$ верно. Далее, $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = n\cdot 2^{n-1} + (n+2)\cdot 2^{n-1} = 2(n+1)\cdot 2^{n-1} = (n+1)\cdot 2^{(n+1)-1}$ - тоже верно.

11.5. Пусть М – некоторое множество пар натуральных чисел $(i, j), 1 \le i < j \le n$ для фиксированного $n \ge 2$. При этом, если пара (i, j) принадлежит М, то никакая пара (j, k) ему не принадлежит. Какое наибольшее множество пар может быть во множестве М?

Ответ. $\frac{n^2}{4}$ при чётном n, $\frac{n^2-1}{4}$ при нечётном n.

Решение. Назовём натуральное число k из интервала от 1 до n *начальным*, если оно является меньшим числом в некоторой паре (k, j) из М, а натуральное число l из интервала от 1 до n *конечным*, если оно является большим числом в некоторой паре (i, l) из М. Никакое число m из интервала от 1 до n не может являться одновременно и начальным и конечным, в противном случае М содержало бы одновременно пары (i, m) и (m, j) для некоторых i и j, что невозможно по условию. Каждая пара (i, l) из М полностью определяется своими начальным числом i и конечным число j, следовательно, М содержит не более ab пар, где a и b - количества его начальных и конечных чисел соответственно. Тогда $ab \le a(n-a) = an - a^2$ - квадратичная функция от целого переменного a. При чётном n она принимает максимальное значение $\frac{n^2}{4}$ при $a = \frac{n}{2}$, а при нечётном n она принимает максимальное значение $\frac{n^2-1}{4}$ при $a = \frac{n-1}{2}$ и $a = \frac{n+1}{2}$.

Пример множества М, для которого эти максимальные оценки достигаются, строится так: объявим начальными все числа от 1 до $\frac{n}{2}$ при чётном n, и все числа от 1 до $\frac{n-1}{2}$ при нечётном n, остальные числа объявим конечными. Поместим в М все возможные пары начального и конечного чисел. Их будет как раз столько, сколько в ответе.

Критерии проверки. Ответы с доказательством максимальности: 5 баллов. Примеры, когда ответы достигаются: 2 балла.