11 класс

Каждая задача оценивается из 7 баллов

11.1..Найти все решения уравнения $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-16}-y+5$.

Ответ. $x=2, y=\frac{3}{2}$.

Решение. Найдём области допустимых значений выражений под каждым корнем. Для первого, второго и четвёртого корня – это $x \in [-2,2], x \in [-\frac{1}{4}, +\infty)$ и $x \in (-\infty,2] \cup [2,+\infty)$ соответственно. Пересечение этих множеств даёт $x=2$. Подставляем это значение в уравнение, получаем $\sqrt{y^2-2y+1} = |y-1| = 2-y$. При $y \geq 1$, раскрывая модуль, находим $y=\frac{3}{2}$, при $y<1$ решений нет. Таким образом, ответом будет $x=2, y=\frac{3}{2}$.

Критерии оценивания. Получение лишних корней: минус 2 балла.

11.2..Пусть– a,b,c - длины сторон произвольного треугольника. Доказать, что $2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2$.

Доказательство. Решение 1. Ввиду неравенства треугольника имеем: $a+b>c, a+c>b, b+c>a$. Перепишем это в виде $a>|b-c|, c>|b-a|, b>|a-c|$. Обе части каждого неравенства положительны, возведём их все в квадрат и сложим, получив: $a^2+b^2+c^2 > b^2+c^2-2bc+a^2+c^2-2ac+a^2+b^2-2ab \Leftrightarrow 2(ab+ac+bc) > a^2+b^2+c^2$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Запишем три теоремы косинусов для треугольника ABC: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A, b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$. Сложив эти три равенства, получим: $a^2+b^2+c^2=2ab\cos C+2ac\cos B+2bc\cos A$. Числа $2ab, 2ac, 2bc$ положительны, а каждый из множителей $\cos C, \cos B, \cos A$ не превосходит 1, поэтому при замене этих множителей в правой части на 1, она не уменьшится и получится требуемое неравенство $a^2+b^2+c^2 \leq 2ab+2ac+2bc$.

Критерии оценивания. Неупоминание о положительности сторон неравенства про возведении в квадрат **или** о положительности $2ab, 2ac, 2bc$ при замене множителей $\cos C, \cos B, \cos A$ в правой части на 1: минус 1 балл.

11.3. Пусть Q и P – основания перпендикуляров, опущенных из вершины B треугольника ABC на биссектрисы его углов A и C соответственно. Доказать, что прямая PQ параллельна стороне AC.

Доказательство. Обозначим за I точку пересечения биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC.. а величины его углов за A,B,C. Тогда величина угла IBC равна B/2, величина угла ICB равна C/2, величина внешнего угла CIB_1 треугольника IBC равна сумме двух предыдущих углов, то есть (B+C)/2. Угол CIB_1 равен вертикальному с ним углу BIC_1= BIP, поэтому в прямоугольном треугольнике PBI третий угол PBI равен 90-(B+C)/2=A/2. Аналогично, угол QBI равен C/2. Углы BPI и BQI прямые, поэтому четырёхугольник BPIQ вписанный в окружность с диаметром BI. Следовательно, вписанные углы PBI и PQI равны, как опирающиеся на одну хорду PI. Значит, накрест лежащие углы PQI=PQA и QAC равны A/2, поэтому прямые MQ и AC параллельны.

11.4..Найти все натуральные числа N такие, что N=p(N)+s(N), где p(N)-произведение всех цифр в десятичной записи N, а s(N)- сумма всех цифр в десятичной записи N.

Ответ. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 9: 19,29,…,99.

Решение. Пусть $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0}$ - десятичная запись $n+1$ - значного числа N, очевидно N не менее, чем двузначно, поэтому $n \geq 1$. По условию $N=\overline{a_n a_{n-1}...a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + a_0 = a_n a_{n-1}...a_0 + a_n + a_{n-1} + ... + a_0$. Ввиду того, что $10^n a_n > 9^n a_n \geq a_n a_n a_{n-1}...a_0$, отсюда следует $a_n + a_{n-1} + ... + a_0 > 10^{n-1} a_{n-1} + ... + a_0$. Перепишем это в виде $a_n > (10^{n-1}-1)a_{n-1} + ...(10-1)a_1$. Если среди цифр N нет нулей, последнее неравенство при $n \geq 2$ невозможно, поэтому $n=1$. Тогда $N = \overline{ab} = 10a + b = ab + a + b \Leftrightarrow 9a = ab \Leftrightarrow b = 9$, a - любое, получаем серию ответов 19,29,…,99.

Если одна из цифр N равна нулю, то $N = \overline{a_n a_{n-1} ... a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + a_0 = a_n + a_{n-1} + ... + a_0$, что невозможно при $n \geq 1$. Значит, этот случай новых ответов не прибавляет.

Критерии оценивания. Только приведены все ответы: 2 балла. Только приведён какой-то ответ: 1 балл. Проверка ответов, полученных как в решении не обязательна.

11.5. Каждая из 15 команд сыграла с каждой другой ровно один раз. Докажите, что хотя бы в одной из игр встретились две команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число игр.

Доказательство. Каждая команда провела на турнире по 14 игр, при этом перед первой из них она провела 0 встреч, перед второй – одну встречу, …, перед последней – тринадцать игр. Всего в турнире было сыграно 15·14/2=105 игр. Для каждой игры в турнире запишем пару чисел: первое – количество игр, сыгранных перед этой игрой одной из встречающихся команд, а второе - количество игр, сыгранных перед этой игрой второй из встречающихся команд. Всего получится 210 чисел, которые в совокупности являются объединением 15-ти копий множества 0,1,2,..,13, по одной копии для каждой команды. Следовательно. сумма всех этих чисел равна 15·(0+1+…+13)=15·13·7 – нечётна. С другой стороны, та же сумма равна сумме 105 чисел, являющихся суммами чисел в парах. Значит, хотя бы одна из сумм чисел в парах нечётна, что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. Найдено общее число игр в турнире: 1 балл. Рассматривается сумма 210 чисел, которые в совокупности являются объединением 15-ти копий множества 0,1,2,..,13, по одной копии для каждой команды: 2 балла.