11 класс

11.1. На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата ABCD соответственно отмечены точки P, Q, R, S, отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1, доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \le PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

Доказательство. Для длин четырёх отрезков из неравенства запишем четыре теоремы Пифагора, $\mathrm{PS}^2 = \grave{\mathrm{A}}\mathrm{P}^2 + \mathrm{SA}^2, \mathrm{PQ}^2 = \mathrm{BP}^2 + \mathrm{BR}^2, \mathrm{QR}^2 = \mathrm{CQ}^2 + \mathrm{CR}^2, \mathrm{RS}^2 = DR^2 + DS^2$. Сложим эти равенства и перегруппируем результат в виде:

$$\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{QR}^2 + \mathrm{RS}^2 + \mathrm{PS}^2 = (\grave{\mathrm{A}}\mathrm{P}^2 + \mathrm{PB}^2) + (BQ^2 + QC^2) + (CR^2 + RD^2) + (DS^2 + SA^2).$$

Каждое из выражений в скобках имеет вид $f(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$, для некоторого $0 < x < 1$ и заключено в интервале от $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ (включая) до $f(1) = 1$ (исключая). Следовательно, сумма $PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2$ заключена в интервале от $4f(\frac{1}{2}) = 2$ (включая) до $4f(1) = 4$ (исключая), что и требовалось доказать.

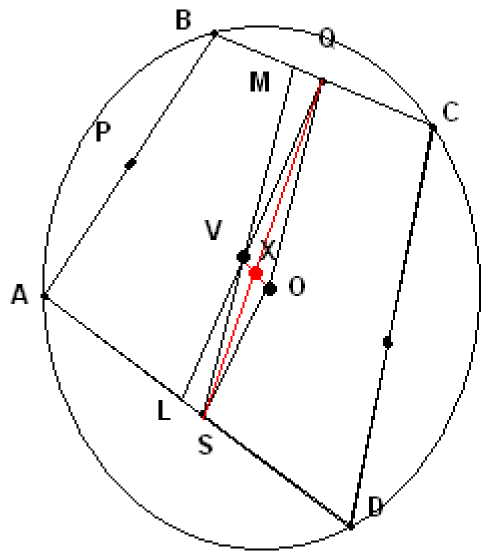
11.2. Найти все натуральные n, которые можно представить в виде суммы $n = a^2 + b^2$, где a - минимальный делитель n, отличный от 1, и b - какой-то делитель n.
Ответ. 8 и 20.
Решение. Если n нечётно, то и все его делители нечётны. поэтому правая часть равенства $n = a^2 + b^2$ чётна – противоречие. Следовательно, n чётно и его минимальный неединичный делитель a равен 2, а $n = 4 + b^2$. По условию, b делит $n = 4 + b^2$, значит, делит и разность $n - b^2 = 4$, поэтому b должно быть равно одному из чисел 1,2,4. При этом n равно 5,8,20 соответственно. Первый случай не подходит ввиду нечётности, остальные два удовлетворяют условию задачи.
Критерии проверки. Доказано, что n - чётно: 1 балл. Упущено одно из решений: минус 2 балла. Только угаданы оба ответа с проверкой: 1 балл.

11.3. Найти все действительные числа a, для которых существуют три различных действительных числа x, y, z таких, что $a = x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$.
Ответ. $a = \pm 1$.
Решение. Предположим, что a удовлетворяет условию задачи. Из первого равенства выразим $x = a - \frac{1}{y} = \frac{ay-1}{y}$ и подставим в третье: $z = a - \frac{1}{x} = a - \frac{y}{ay-1} = \frac{a^2y - y - a}{ay-1}$. Последнее выражение подставим во второе равенство: $a = y + \frac{1}{z} = y + \frac{ay-1}{(a^2-1)y - a} = \frac{(a^2-1)y^2 - 1}{(a^2-1)y - a}$, откуда получаем соотношение $(a^2-1)(y^2 - ay + 1) = 0$, являющееся квадратным уравнением относительно y, если $a^2 - 1 \neq 1$. Ввиду симметричности соотношений в условии, тому же уравнению удовлетворяют и оставшиеся переменные x и z. Всё это вместе даёт три различных корня квадратного уравнения $y^2 - ay + 1 = 0$, что невозможно. Следовательно, $a^2 = 1, a = \pm 1$.

Если $a^2 = 1$, то для любого значения y положим $x = a - \frac{1}{y} = \frac{ay-1}{y}$, $z = \frac{-a}{ay-1}$, тогда $a = y + \frac{1}{z} = \frac{(a^2-1)y^2 - 1}{(a^2-1)y - a} = \frac{1}{a}$ - соотношения условия выполнены. Требование различности x, y, z при этом равносильно тому, что y не является корнем квадратного уравнения $y^2 - ay + 1 = 0$. Последнее уравнение не имеет действительных корней так как его дискриминант равен $a^2 - 4 = -3$ - отрицателен, следовательно, для любого y полученная тройка различных чисел x, y, z удовлетворяет условию задачи.
Критерии проверки. Доказано, что a может равняться только 1 или -1: 5 баллов. Доказано, что для $a = \pm 1$ существую три различных числа x, y, z : 2 балла.

11.4. Доказать, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон произвольного вписанного четырёхугольника на его противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим вершины произвольного вписанного в окружность четырёхугольника за A, B, C и D, центр окружности за O, середины сторон AB, BC, CD и DA за P, Q, R и S соответственно. Отрезки OQ и OS являются серединными перпендикулярами к сторонам BC и AD, поэтому они параллельны перпендикулярам SM и QL, опущенным на эти стороны из середин противоположных сторон четырёхугольника. Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров за V, из параллельности отрезков OQ и SV, а также OS и QV следует, что четырёхугольник OSVQ является параллелограммом. Следовательно, его диагонали SQ и OV пересекаются в точке X, делящей их пополам. Диагональ SQ при этом является средней линией четырёхугольника ABCD, поэтому точка V пересечения перпендикуляров QL и SM, опущенных из середин сторон BC и AD на противоположные стороны четырёхугольника, симметрична центру O описанной окружности относительно середины X отрезка SQ, соединяющего середины сторон BC и AD.



Аналогично доказывается, что точка W пересечения перпендикуляров, опущенных из середин сторон AB и CD на противоположные стороны четырёхугольника, симметрична центру O описанной окружности относительно середины отрезка PR, соединяющего середины сторон AB и CD. Хорошо известно, что четырёхугольник PQRS, образованный серединами сторон произвольного четырёхугольника ABCD, образуют параллелограмм, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD и равны их половинам. Следовательно, отрезки PR и QS, являющиеся диагоналями параллелограмма PQRS, делятся точкой их пересечения пополам, поэтому их середины совпадают. Значит, совпадают и точки W и V, симметричные центру O относительно этих середин. Таким образом, все четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон вписанного четырёхугольника ABCD, пересекаются в точке V=W, симметричной центру O описанной окружности относительно точки пересечения средних линий PR и QS этого четырёхугольника.

Критерии проверки. Известный факт о параллелограмме PQRS достаточно чётко сформулировать, но не доказывать.

11.5. В некоторых клетках прямоугольной доски размера 101 на 99 сидят по одной черепашке. Каждую минуту каждая из них одновременно переползает в одну из клеток доски, соседнюю с той, в которой они находятся, по стороне. При этом, каждый следующий ход делается ими в направлении, перпендикулярном предыдущему: если предыдущий ход был горизонтальным - налево или направо, то следующий будет вертикальным - вверх или вниз, и наоборот. Какое максимальное количество черепашек может перемещаться по доске неограниченное время так, что в каждый момент в каждой клетке будет находиться не более одной черепашки?

Ответ. 9800.

Решение. Примеры неограниченного движения по доске 9800 черепашек.

Пример 1. Рассадим пресмыкающихся в клетки прямоугольника, состоящего из клеток, стоящих на пересечении 98 нижних горизонталей и 100 левых вертикалей. Ходить они будут одинаково: сначала все направо, потом все вверх, потом все налево и затем все вниз.

После 4 ходов ситуация совпадёт с первоначальной., поэтому движение может продолжаться разрешённым образом сколь угодно долго.

Пример 2. Исходная рассадка черепашек как в примере 1, но движение организовано так: разбиваем их на квадратики 2 на 2 клетки, в каждом из которых они одновременно двигаются по часовой стрелке.

Докажем, что большее, чем 9800, количество черепашек правильно рассадить на доске 101 на 99 нельзя. Предположим противное, что черепашки размещены на доске некоторым образом так, что у них есть возможность неограниченно долго перемещаться по доске указанным в условии способом и не оказываться на одной клетке в количестве двух и более одновременно. Раскрасим клетки доски в шахматном порядке так, что левая нижняя клетка, как обычно, чёрная. Получится 5000 чёрных и 4999 белых клетки. Среди чёрных клеток *нечётными* назовём клетки, номера вертикали и горизонтали которых нечётны, и чётными - номера вертикали и горизонтали которых чётны. Заметим, что для белых клеток один из этих номеров чётен, а другой – нечётен. Нечётных чёрных клеток будет $51 \cdot 50 = 2550$, а чётных чёрных клеток $50 \cdot 49 = 2450$. Ясно, что в каждый момент количество черепашек на чётных чёрных клетках не должно превосходить 2450.

Заметим, что при выполнении двух последовательных ходов меняется чётность обеих координат каждой черепашки, поэтому после двух ходов все черепашки с нечётных чёрных клеток переместятся на чётные чёрные клетки и наоборот, а черепашки с белых клеток переместятся снова на белые клетки. Следовательно, в любой момент времени количество черепашек на всех чёрных клетках не превосходит $2 \cdot 2450 = 4900$.

Наконец, при выполнении одного хода черепашки с чёрных клеток переходят на белые и наоборот, поэтому общее количество черепашек на всей доске не может превосходить $2 \cdot 4900 = 9800$.

Замечание. На самом деле, мы доказали, что, если черепашек на доске больше, чем 9800, то, они смогут сделать не более двух ходов, не оказываясь на одной клетке в количестве двух и более одновременно.

Критерии проверки. Доказательство максимальности числа 9800: 6 баллов. Построение примера для 9800 черепашек: 1 балл. Попытка доказательство любой другой оценки, кроме 9800: 0 баллов.