10 класс

Каждая задача оценивается из 7 баллов

10.1.. Для каждого действительного числа x обозначим через $h(x)$ наибольшее значение функции $f(t)=t-t^2$ на промежутке $(-\infty, x]$. Найти все решения уравнения: $2x^2-3x+3=8h(x)$.

Ответ. $x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$.

Решение. Функция $f(t)=t-t^2$ возрастает на промежутке $(-\infty,\frac{1}{2}]$, достигает максимума $\frac{1}{4}$ при $t=\frac{1}{2}$ и убывает на промежутке $[\frac{1}{2},+\infty)$. Поэтому $8h(x)=\begin{cases} 8f(x), x\le\frac{1}{2}, \\ 2, x\ge\frac{1}{2}. \end{cases}$ На промежутке $(-\infty,\frac{1}{2}]$ получаем уравнение $2x^2-3x+3=8x-8x^2 \Leftrightarrow 10x^2-11x+3=0$, имеющая корни $x=\frac{1}{2}, x=\frac{3}{5}$, второй из которых – посторонний. На промежутке $[\frac{1}{2},+\infty)$

получаем уравнение $2x^2-3x+3=2 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$, имеющая корни $x=\frac{1}{2}, x=1$, лежащие в рассматриваемом промежутке. Объединяя, получаем ответ $x_1=\frac{1}{2}, x_2=1$.

Критерии оценивания. Если в первой части решения не говорится о том, что корень $x=\frac{1}{2}$ в этом случае посторонний - минус 1 балл.

10.2..Найти минимальное натуральное число, которое можно получить в виде дроби $\frac{100x}{y}$, где x, y - некоторые двузначные числа.

Ответ. 15.

Решение. Пусть $d \le 9$ - наибольший общий делитель двузначных чисел x, y, и $x=da, y=db$, где $a,b \ge 2$ - взаимно простые одно- или двузначные числа. Дробь $\frac{a}{b}$ несократима, а дробь $\frac{100a}{b}$ является целым числом, поэтому b.- делитель числа 100. Значит, b равен одному из чисел 1,2,4,5,10,20,25,50.

Если $b \le 5$, то дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 20, что, как мы дальше увидим, слишком много.

Если $b=10$, то при $a \ge 2$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 20.

Если $b=20$, то при $a \ge 4$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 20, а при $a=2$ дробь $\frac{a}{b}$ не является несократимой. При $a=3$ получим $\frac{100a}{b}=\frac{100\cdot 3}{20}=\frac{100\cdot 12}{80}=15$- целое значение дроби $\frac{100x}{y}$ при $x=12, y=80$.

Если $b=25$, то при $a \ge 4$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 16. При $a=2{,}3$, ввиду того, что здесь $d \le 3$, число $x=da$ не может быть двузначным.

Если $b=50$, то при $a \ge 8$ дробь $\frac{100a}{b}$ не меньше 16. При остальных значениях a число $x=da$ не может быть двузначным, так как здесь $d=1$. Таким образом. найденное нами значение 15 является минимальным для дроби из условия.

Критерии оценивания. Только приведён пример $\frac{100\cdot 12}{80}=15$: 1балл. Доказан частный случай типа «дробь не равна 11»: 1 балл.

10.3. Доказать, что для любых $0 \le x, y \le 1$ выполнено неравенство $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \le 1$.

Доказательство 1. Заменим в знаменателях дробей левой части неравенства единицы на $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$ соответственно. При этом знаменатели дробей не увеличатся и останутся положительными, а значения дробей не уменьшатся: $\frac{x}{1+y}+\frac{y}{1+x} \le \frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+x}=\frac{x+y}{x+y}=1$ - что и требовалось доказать.

Доказательство 2. Избавимся от знаменателей и приведём подобные, получим $x^2 + y^2 \le 1 + xy$. Если $x \le y$, то требуемое неравенство получается сложением неравенств $y^2 \le 1$ и $x^2 \le xy$. Если $y \le x$, то требуемое неравенство получается сложением неравенств $x^2 \le 1$ и $y^2 \le xy$.

10.4.. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC. На отрезке CM выбраны точки P и Q так, что P ближе к М, Q ближе к C и $CQ=2PM$. Оказалось, что $BQ = AC$. Найти величину угла APM.

Ответ. $APM=90^\circ$.

Решение. Отметим на продолжении СМ за М точку Т такую, что МТ=МР. При этом отрезки АВ и ТР делятся точкой пересечения М пополам, значит четырёхугольник АТВР является параллелограммом. В частности, отрезки АР и ВТ равны и параллельны. Рассмотрим треугольники BQT и APC. В них стороны BQ и AC равны по условию, QT и PC равны по построению, стороны АР и ВТ равны по доказанному выше. Следовательно, треугольники BQT и APC равны, значит равны их соответственные углы BTQ и APC. Из параллельности АР и ВТ следует, что сумма этих углов равна 180°, поэтому каждый из них равен 90°. Тогда и угол АРМ, дополнительный к АРС, равен 90°.

Замечание. Другое решение получится, если отметить на продолжении СМ за М точку Е такую, что МЕ=MQ и заметить, что треугольник АСЕ равнобедренный, а Р – середина его основания.

Критерии оценивания. Делается попытка отложить МТ=МР или ME=MQ без продвижения: 1 балл. Замечается при этом, что треугольник АСЕ равнобедренный: ещё 1 балл.

10.5. Каждый из 10 сортов конфет попробовали больше половины учащихся класса. Докажите, что можно выбрать некоторых трёх учащихся таких, что каждый сорт конфет попробовал хотя бы один из них.

Доказательство. Пусть в классе учатся N школьниц и школьников, каждый сорт конфет попробовали больше половины из них, поэтому количество пар (учащийся, опробованный им сорт конфет) больше 10N/2=5N. Следовательно, есть учащийся А, попробовавший более, чем 5N/N=5, то есть не менее, чем 6 сортов конфет. Если А попробовал все сорта, добавив к А любых двух учащихся, получим искомую в условии тройку.

Если А попробовал не все сорта конфет, рассмотрим сорта, которые не пробовал А, их не больше четырёх, и всех учащихся, пробовавших хотя бы один из этих сортов. Повторяя предыдущее рассуждение, находим среди них учащегося Б., попробовавшего не меньше 3 из оставшихся сортов. Если А и Б вместе опробовали все сорта, добавив к ним любого учащегося, получим искомую в условии тройку.

Если остался сорт, не опробованный ни одним из А и Б, берём любого учащегося В, пробовавшего этот сорт (он существует по условию) и получим искомую в условии тройку А, Б и В.

Критерии оценивания. Доказано, что есть учащийся А, попробовавший не менее, чем 6 сортов конфет: 2 балла.