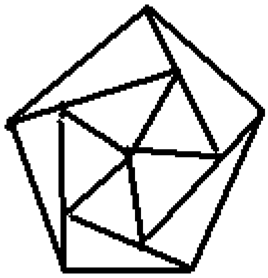
10 класс

10.1. Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство: $x^8 - x^5 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4} > 0$.

Доказательство. Преобразуем исходное неравенство к эквивалентному виду $x^8 - x^5 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4} = \dfrac{x^{12} - x^9 - x^3 + 1}{x^4} = \dfrac{(x^3-1)(x^9-1)}{x^4} = \dfrac{(x^3-1)^2(x^6+x^3+1)}{x^4}$. В полученном выражении $(x^3-1)^2 \geq 0, x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$ и $x^6 + x^3 + 1 = (x^3 + \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ при всех x, поэтому оно неотрицательно при всех $x \neq 0$.

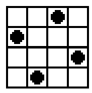
10.2. Разрезать правильный пятиугольник на несколько треугольников так, чтобы каждый из них граничил ровно с тремя другими. Граничить – значит иметь общий отрезок границы.

Решение. Например, можно разрезать так:



Критерии проверки. Если в примере используются треугольники, имеющие только общие вершины: 0 баллов.

10.3. Найти все натуральные n, для которых на клетчатой доске размера n на n клеток можно отметить n клеток, стоящих в разных горизонталях и разных вертикалях, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня, начиная с некоторой, не вставая на одну клетку дважды, и вернуться на исходную клетку. Конь при этом может вставать только на отмеченные клетки.
Ответ. $n=4$.

Решение. Пример для $n=4.$ несложен: . Докажем, что при $n\neq 4.$ требуемого в условии набора клеток не существует.
Предположим, при данном n удалось отметить n клеток в разных горизонталях и разных вертикалях доски n на n, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня и вернуться в исходную отмеченную клетку. Рассмотрим величины горизонтальных перемещений коня при его последовательных ходах по отмеченным клеткам вертикалей доски. Конь либо придёт в клетку на вертикали **a** (первой слева) из клетки на вертикали **b** (второй слева), а затем уйдёт в клетку на вертикали **c**(третьейй слева), либо наоборот. В первом случае (второй случай симметричен первому), чтобы не было повторов вертикалей, прийти на вертикаль **b** он может только с вертикали **d**, а уйти с вертикали **c** может только на вертикаль **e.** Все предшествующие приходу на вертикаль **d** и последующие за уходом с вертикали **e** ходы делаются с горизонтальным смещением 2, кроме одного со смещением 1, который замкнёт цепь перемещений коня и может произойти только у правого края доски. Всего конь сместится по горизонтали 2 раза на одну клетку и $n-2.$раза на две клетки. Ровно то же самое можно сказать и о его вертикальных перемещениях по горизонталям доски. Каждым ходом конь смещается в одном направлении на одну клетку, а в другом – на две, поэтому в общем наборе из всех его $2n$ смещений в обоих направлениях число смещений на одну клетку должно совпадать с числом смещений на две клетки, откуда $2n-4=4$ и $n=4$.
Критерии проверки. Идея рассмотрения ходов по трём крайним вертикалям (горизонталям) доски: 2 балла.

10.4. Пусть $m<n$ - натуральные числа. Доказать, что среди произвольных последовательных n натуральных чисел всегда найдутся два, произведение которых делится на mn.
Доказательство. Рассмотрим произвольные n последовательных натуральных чисел, назовём их множеством А. Остатки от деления n последовательных натуральных чисел на n принимают, в некотором циклическом порядке все значения $0,1,...,n-2,n-1$, поэтому среди них всегда найдётся число, делящееся на n. Поскольку $m<n$, то среди тех же чисел найдётся число, делящееся на m. Если первое и второе найденные числа различны, то их произведение делится на mn.

Предположим, что оба найденных числа совпадают и равны c. Обозначим наибольший общий делитель m и n за $d<n$, тогда $m=d\cdot m_1, n=d\cdot n_1$, причём m_1 и n_1 взаимно просты. Ввиду того, что c делится на m и n, оно делится и на их наименьшее общее кратное, равное $d\cdot m_1\cdot n_1$. Чтобы получить произведение, делящееся на $mn=d^2\cdot m_1\cdot n_1$, достаточно найти среди чисел множества A второй сомножитель, делящийся на d. Числа $c-d$ и $c+d$ делятся на d, поэтому, если одно из них лежит в A, его можно взять в качестве второго сомножителя для c. Если же оба они не лежат в A, то первое меньше всех чисел из A, а второе – больше всех чисел из A, поэтому их разность, равная $2d$, не меньше $n+1$. Тогда $d>\frac{n}{2}$, что невозможно, так как d - собственный делитель n и не может превосходить $\frac{n}{2}$ - противоречие.

Критерии проверки. Верно рассмотрен только случай, когда первое и второе найденные числа различны: 2 балла.

10.5. На отрезке AB отмечена произвольная точка M, отличная от A и B. С одной стороны от прямой AB выбрана точка C, а с другой – точки D и E такие, что треугольники ABC, AMD и MBE являются равносторонними. Обозначим через P, Q, R точки пересечения медиан треугольников ABC, AMD и MBE соответственно. Доказать, что: а) треугольник PQR – равносторонний, б) точка пересечения медиан треугольника PQR лежит на отрезке AB.

Решение. а) Обозначим за T точку пересечения прямых AQ и BR. Четырёхугольник APBT является ромбом с углами 60º и 120º при вершинах A и P, треугольники APT и BPT - равносторонние. Заметим, что $AP=\frac{AB}{\sqrt{3}}, AQ=\frac{AM}{\sqrt{3}}, BR=\frac{BM}{\sqrt{3}}$ и $AM+BM=AB$, поэтому $AP=AQ+BR=AT=BT$. Следовательно, *QT=BR, PT=PB* и треугольники *QTP* и *RBP* равны по углам *QTP* = *RBP* = 60º и парам прилегающих к ним сторон. Кроме того, угол между соответственными сторонами *PT* и *PB* тоже равен 60º, значит треугольник *QTP* получается из треугольника *RBP* поворотом относительно вершины P на 60º по часовой стрелке. Следовательно, стороны *QP* и *RP* треугольника *PQR* равны и угол *QPR* между ними составляет 60º, значит оставшиеся два угла также равны 60º треугольник *PQR* – равносторонний.

б) Заметим, что углы PQR и PTR равны 60º, поэтому точка Q лежит на описанной окружности треугольника PTR. Следовательно, описанные окружности треугольников PTR и PQR совпадают. Обозначим точку пересечения медиан треугольника PQR за S, она является и центром описанной окружности этого треугольника, совпадающей с описанной окружностью треугольника PTR. Значит, точка S лежит на серединном перпендикуляре AB к хорде PT данной окружности, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Пункт а) 4 балла, пункт б) 3 балла.