

**11.1.** Пусть функция  $f(x)$  определена для всех действительных чисел  $x$  и для всех  $x$  выполнено неравенство  $f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}$ . Докажите, что  $f(x)$  не может принимать каждое своё значение ровно один раз.

**11.2.** Может ли натуральное число, цифры в десятичной записи которого строго убывают слева направо, делиться на 111?

**11.3.** Найдите сумму дробей  $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$ .

**11.4.** Пусть  $E$  – точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , а  $A_1, B_1, C_1, D_1$  и  $A_2, B_2, C_2, D_2$  – это точки пересечения медиан и высот в треугольниках  $AEB$ ,  $BEC$ ,  $CED$  и  $DEA$  соответственно. Докажите, что четырёхугольники  $A_1B_1C_1D_1$  и  $A_2B_2C_2D_2$  подобны.

**11.5.** В клетках таблицы 9 на 9 некоторым образом расставлены все натуральные числа от 1 до 81 включительно, по одному в клетке. Разрешается выбрать квадрат произвольного размера, стороны которого идут по линиям сетки и спросить, каково множество чисел, записанных во всех клетках указанного квадрата. За какое наименьшее число таких вопросов всегда можно полностью восстановить расстановку чисел во всех клетках квадрата 9 на 9?