

11.1. Пусть функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел x и для всех x выполнено неравенство $f(x^2) - f(x)^2 \geq \frac{1}{4}$. Докажите, что $f(x)$ не может принимать каждое своё значение ровно один раз.

11.2. Может ли натуральное число, цифры в десятичной записи которого строго убывают слева направо, делиться на 111?

11.3. Найдите сумму дробей $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$.

11.4. Пусть E – точка пересечения диагоналей выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 – это точки пересечения медиан и высот в треугольниках AEB , BEC , CED и DEA соответственно. Докажите, что четырёхугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ подобны.

11.5. В клетках таблицы 9 на 9 некоторым образом расставлены все натуральные числа от 1 до 81 включительно, по одному в клетке. Разрешается выбрать квадрат произвольного размера, стороны которого идут по линиям сетки и спросить, каково множество чисел, записанных во всех клетках указанного квадрата. За какое наименьшее число таких вопросов всегда можно полностью восстановить расстановку чисел во всех клетках квадрата 9 на 9?