

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2019-2020 г.г.

Заключительный этап

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

Время написания 4 астрономических часа

10.1. Пусть a, b, c - не обязательно различные натуральные числа такие, что дроби

$\frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b}, \frac{b+c}{a}$ тоже являются натуральными числами. Найти все возможные значения

суммы $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$.

10.2. На сторонах АВ, ВС, АС равностороннего треугольника АВС отмечены точки Р и Q, R,S соответственно, такие, что AP=CS, BQ=CR. Доказать, что угол между отрезками PR и QS равен 60 градусов.

10.3. Найти минимальное и максимальное значения выражения $3x^2y - 2xy^2$, где x, y принимают произвольные значения из интервала $[0,1]$

10.4. На доске 10 на 10 часть клеток отмечена, причём никакие три отмеченные клетки не образуют «уголок». Доказать, что доску можно разбить на домино из двух соседних по стороне клеток, содержащие не более одной отмеченной клетки каждое.

10.5. Представить число 1000 в виде суммы максимально возможного количества натуральных чисел, суммы цифр которых попарно различны.