Решения заданий Заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2019-2020 г.г.
Каждая задача оценивается в 7 баллов

Решения заданий 9 класса

9.1. Для неотрицательных чисел a,b,c,d выполнены равенства: $\sqrt{a+b}+\sqrt{c+d}=\sqrt{a+c}+\sqrt{b+d}=\sqrt{a+d}+\sqrt{b+c}$. Какое максимальное количество различных может быть среди чисел a,b,c,d?

Ответ. Два.

Решение. Возведём первое равенство в квадрат, приведём подобные, сократим на 2, ещё раз возведём в квадрат, снова приведём подобные, получив в итоге равенство $ac+bd=ab+cd$, равносильное $(a-d)(c-b)=0$, откуда либо $a=d$, либо $b=c$. Проделав аналогичные манипуляции со вторым равенством, получим $a=b$, либо $d=c$. Любое равенство из первой пары имеет общую букву с любым равенством из второй пары, поэтому три из четырёх чисел обязательно равны между собой и среди чисел a,b,c,d не может быть больше двух различных. С другой стороны, любой набор из четырёх неотрицательных чисел, среди которых три одинаковых, а четвёртое произвольно, очевидно удовлетворяет условию задачи, поэтому среди чисел a,b,c,d могут быть ровно два различных.

Критерии проверки. Доказательства того, что среди чисел a,b,c,d не может быть больше двух различных: 5 баллов. Пример, когда ровно два различных: 2 балла.

9.2. Если Петя отдаст две свои тетрадки Васе, то у Васи станет в n раз больше тетрадок, чем у Пети, а если Вася отдаст n своих тетрадок Пете, то у Пети станет в два раза больше тетрадок, чем у Васи. Найти все натуральные значения n, при которых это возможно.

Ответ. $n=1,2,3,8$.

Решение. Обозначим количество тетрадок у Пети и Васи за x и y штук соответственно. После передачи Петей Васе двух тетрадок получим равенство $n(x-2)=y+2$, а после передачи n тетрадок Васей Пете – равенство $x+n=2(y-n)$. Из первого равенства выразим $y=nx-2n-2$ и подставим во второе: $x+n=2nx-6n-4$, откуда $x=\frac{7n+4}{2n-1}=3+\frac{n+7}{2n-1}$. Дробь $\frac{n+7}{2n-1}>0$ должна быть натуральным числом, поэтому $2n-1\le n+7$, следовательно $n\le 8$. Перебрав натуральные числа от 1 до 8, мы получим, что дробь $\frac{n+7}{2n-1}$ принимает целые значения при $n=1,2,3,8$. При этом соответствующие пары (x,y) равны (11,7),(6,6),(5,7),(4,14).

Критерии проверки. Составлена, но не решена соответствующая система уравнений: 2 балла. Если решение доведено до стадии $x=\frac{7n+4}{2n-1}$: 3 балла.

Если решение доведено до стадии $2n-1 \le n+7$: 4 балла. Найдены $n = 1,2,3,8$, но не указаны соответствующие пары (x, y): 6 баллов. Только приведены примеры для некоторых n: 1 балл. Примеры для всех n: 2 балла.

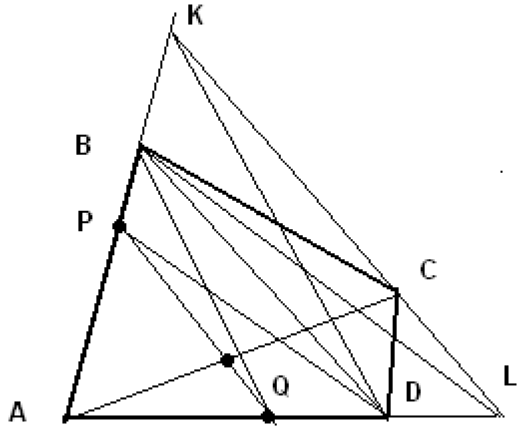
9.3. Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 100 включительно на десять множеств, содержащих различное количество чисел каждое и таких, что, чем больше чисел содержит множество, тем меньше сумма его элементов?

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, указанное в условии разбиение возможно. Сумма всех чисел от 1 до 100 равна 5050, следовательно, сумма чисел во множестве с максимальной суммой не меньше 5050:10=505, поэтому оно содержит не меньше 6 чисел. По условию, каждое из девяти оставшихся множеств содержит различное, большее шести, количество чисел. Следовательно, во всех десяти множествах содержится не меньше 6+7+…+15=105 чисел – противоречие.

Критерии проверки. Доказано, что множество с минимальным количеством чисел содержит не меньше 6 чисел: 3 балла.

9.4. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника ABCD отмечены точки P и Q соответственно такие, что отрезки BQ и DP делят площадь четырёхугольника пополам. Доказать, что отрезок PQ проходит через середину диагонали AC.



Доказательство. Проведём через вершину C параллельно диагонали BD прямую, пересекающую продолжения сторон AB и AD в точках K и L соответственно. Площади треугольников BKD, BCD и BLD, имеющих общее основание BD и одинаковые высоты, равны, поэтому площади треугольников AKD и ABL равны площади четырёхугольника ABCD, а отрезки DP и BQ делят их площади соответственно пополам. Следовательно, отрезки DP и BQ являются медианами треугольников AKD и ABL, а точки P и Q серединами отрезков AK и AL. Значит, отрезок PQ – средняя линия в треугольнике AKL, параллельная стороне KL и, по теореме Фалеса, делит отрезок AC пополам, что и требовалось доказать.

9.5. Прямоугольник 17 на 19 клеток произвольным образом разбит отрезками, идущими по линиям сетки, на меньшие прямоугольники. Доказать, что найдётся прямоугольник разбиения, все четыре расстояния (измеряемые в клетках) от каждой стороны которого до ближайшей стороны большого прямоугольника имеют одну и ту же чётность.

Доказательство. Приведём следующие несложные и хорошо известные факты о прямоугольниках и полосках (прямоугольниках шириной в одну клетку) из клеток, раскрашенных в шахматном порядке.

1) Полоска из чётного числа клеток содержит равное количество белых и чёрных клеток, её крайние клетки окрашены в разные цвета. Полоска из нечётного числа клеток содержит клеток одного цвета на одну больше, чем другого, её крайние клетки окрашены в один цвет – цвет большинства клеток в полоске.

2) Если одна из сторон прямоугольника имеет чётную длину в клетках, то он содержит поровну чёрных и белых клеток, среди его углов две белых и две чёрных клетки. Это следует из п.1) и разбиения прямоугольника на полоски чётной длины. Если обе стороны прямоугольника имеют нечётную длину, то он содержит клеток одного цвета на одну больше, чем другого, четыре его угловые клетки окрашены в один цвет – цвет большинства клеток в прямоугольнике. Это следует из п.1) и разбиения прямоугольника на полоску нечётной длины и прямоугольник с чётной стороной. Крайние клетки каждой строки и столбца такого четырёхугольника окрашены в один цвет.

Перейдём к доказательству утверждения в условии. Раскрасим прямоугольник 17 на 19 в шахматном порядке так, что чёрных клеток в нём на одну больше, чем белых, тогда все его угловые клетки – чёрные. Тогда хотя бы один из прямоугольников разбиения тоже содержит чёрных клеток на одну больше, чем белых и его угловые клетки – тоже чёрные. Длины его сторон, в соответствии с п.2) – нечётны. Сумма расстояний (в клетках) от левого края выбранного прямоугольника до левого края исходного прямоугольника 17 на 19 и от правого края выбранного прямоугольника до правого края исходного прямоугольника 17 на 19 равна разности длин горизонтальных сторон этих прямоугольников, то есть разности двух нечётных чисел, следовательно, чётна. Значит, оба расстояния имеют одинаковую чётность. Аналогично, одинаковую чётность имеют и расстояния между верхним и нижним краями выбранного и исходного прямоугольников. Наконец, соединим левые нижние клетки обоих прямоугольников последовательностью клеток в виде уголка с концами в этих клетках. Поскольку крайние клетки этого уголка имеют один цвет, он содержит нечётное число клеток, равное сумме расстояний от левого края выбранного прямоугольника до левого края исходного прямоугольника и от нижнего края выбранного прямоугольника до нижнего края исходного прямоугольника плюс ещё одну клетку. Следовательно, сумма указанных расстояний чётна, поэтому они имеют одинаковые чётности. Таким образом, все четыре расстояния между соответствующими краями выбранного и исходного прямоугольников равны, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Замечено, что хотя бы один из прямоугольников разбиения тоже содержит чёрных клеток на одну больше, чем белых и его угловые клетки – тоже чёрные: 1 балл. Доказано, что расстояния между краями прямоугольников в одном направлении имеют одинаковую чётность: 3 балла.