Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2019-2020 г.г. по математике
8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Паша и Саша сделали три одинаковых машинки. Саша сделал пятую часть всей работы. После этого они их продали и разделили выручку пропорционально проделанной работе. Паша заметил, что если он отдаст Саше 400 рублей, а Саша сделает ещё такую же машинку и продаст её, то денег у них будет поровну. Сколько стоит одна машинка?

Ответ: 1000 рублей.

Решение: Саша сделал пятую часть всей работы, то есть он сделал 0,6 одной машинки, а Паша оставшиеся 2,4. То есть разница в 1,8 машинки. Если Саша сделает ещё машинку, то разность будет 0,8 одной машинки. Паша отдал 400 своих рублей, тем самым он уменьшил количество денег у себя на 400 рублей и на ту же сумму увеличил количество денег у Паши. То есть изменил разность количество денег у одного и у другого на 800 рублей. Итак, 0,8 машинки соответствует 800 рублям. Следовательно, целая машинка стоит 1000 рублей.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.

Ответ с проверкой – 1 балл.

Решение, в котором 0,8 машинки соответствует 400 рублей – не более 2 баллов.

8.2. У Марка 2020 камней. Он собирается их разделить на 5 кучек так, чтобы не было двух кучек с одинаковым количеством камней. При этом Марк хочет, чтобы можно было бы любую кучку убрать, а все камни из неё разложить по оставшимся четырём кучкам так, чтобы во всех них стало равное число камней. Получится ли у Марка сделать задуманное?

Ответ: Получится.

Решение: Например, кучи 402, 403, 404, 405, 406.

Докажем, что такие кучи подойдут. Для удобства рассмотрим каждую кучу как 396 основных камней и ещё 6, 7, 8, 9, 10 добавочных камней, соответственно. Часть в 396 камней делится на 4 кучи поровну (по 99 камней). Таким образом, во всех кучах основных камней поровну.

Кучу в 6 камней раскладываем на 3, 2, 1 и 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 7 камней раскладываем на 4, 2, 1, 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 8 камней раскладываем на 4, 3, 1, 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 9 камней раскладываем на 4, 3, 2, 0 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Кучу в 10 камней раскладываем на 4, 3, 2, 1 камней и добавляем к оставшимся кучам до 10 добавочных камней.

Критерии:

Только ответ – 0 баллов.

Только верный пример без проверки – 3 балла.

Утверждение «очевидно, если Марк сделает все кучки меньше чем по 505 камней, то у него всё получится» без внятных обоснований – 3 балла.

Утверждение «очевидно, если Марк сделает все кучки меньше чем по 505 камней, то у него всё получится» с доказательством, но без пояснения, почему на такие кучки можно разложить 2020 камней – 6 баллов.

Верный пример с частичный проверкой и утверждением, что «дальше аналогично», если дальше аналогия работает – 7 баллов.

8.3. На доске написано число 4. За один ход Ане разрешается выбрать любой собственный делитель числа, написанного на доске, и прибавить его к этому числу, записав сумму вместо старого числа. Данную операцию разрешается проделывать неограниченное число раз. Докажите, что Аня может получить на доске любое составное число. Делитель числа n называется собственным, если он не равен 1 и n.

Решение:

Любое чётное число Аня получит из 4 прибавлением 2 необходимое число раз.

Нечётное составное число можно представить в виде pk, где p – наименьший простой делитель этого нечётного числа. Пусть Аня сначала получит чётное число $2k$, а затем добавлением k необходимое число раз, получит pk.

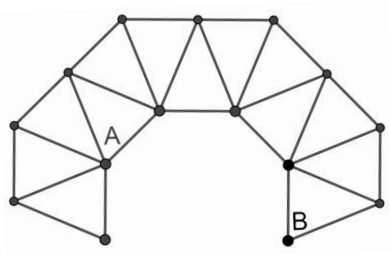
Критерии:

Рассмотрен случай чётного числа – 1 балл.

Рассмотрен случай числа, кратного 3 (или 5, или 7 и т.д.) – 2 балла.

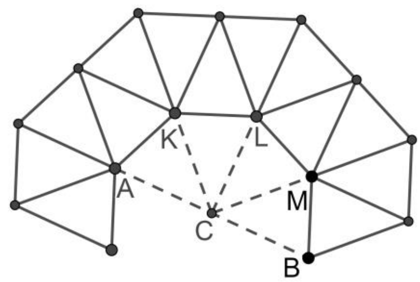
Рассмотрены чётные числа и нечётные числа, кратные 3 (или 5, или 7 и т.д.) – 3 балла.

8.4. Из одинаковых равнобедренных треугольников, у которых угол напротив основания равен 45°, а боковая сторона равна 1, сложили фигуру, как показано на рисунке. Найдите расстояние между точками A и B.



Ответ: 2.

Решение: Обозначим точки K, L, M, как показано на рисунке. И построим равнобедренный треугольник AKC, равный исходным. Соединим вершину C с другими точками так, как на рисунке.



В исходных треугольниках угол при вершине равен 45°. Значит, два остальных угла равны по 62,5°. Тогда угол $\angle CKL$ = 360° - 62,5° - 62,5° - 45° - 45° - 62,5° = 62,5°. Тогда треугольники AKC и KLC равны по двум сторонам и углу между ними. Аналогично доказывается, что и треугольники LMC и MBC равны исходным. Тогда угол $\angle ACB$ равен 4*45° = 180°, то есть точки A, C, B лежат на одной прямой. Тогда $AB = AC + CB = 2$.

Критерии:

Построена подходящая конструкция, но не обосновано, что точки A, C, B лежат на одной прямой (или точка C – середина отрезка AB, но не обосновано, что получились треугольники равные исходным) – 1 балл.

Решение ссылается на то, что у правильного восьмиугольника есть центр, и другие очевидные свойства восьмиугольника – снимать не более 1 балла.

8.5. Юра и Рома нашли 2019 натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе 1010 из 2019 получившихся квадратов, а Рома 1009 оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.

Решение: Например, числа от 2037171 до 2039189.

Для проверки перепишем эти числа в другом виде. Обозначим за x число 2020*1009, тогда числа из примера будут представлены в виде $x - 1009$, …, x, …, $x + 1009$. Пусть Юра возьмёт квадраты первых 1010 чисел, а Рома 1009 оставшихся квадратов.

Сумма чисел у Юры будет равна $1010*x^2 - 2x(1 + \ldots + 1009) + 1^2 + \ldots + 1009^2$, а у Ромы $1009*x^2 + 2x(1 + \ldots + 1009) + 1^2 + \ldots + 1009^2$. Разность этих сумм равна $x^2 - 4x(1 + \ldots + 1009) =$

$x(x - 4(1 + \ldots + 1009)) = x(x - 2*1010*1009) = 0$ (так как $x = 2020*1009$). Значит, этот набор подходит.

Критерии:

Подходящий набор без доказательства, что он подходит – 0 баллов.

Верное доказательство, набор задан через переменные, или при попытки посчитать, что это будут за числа, допущена арифметическая ошибка – баллы не снимать.