Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2019-2020 г.г. по математике

7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Паша и Саша сделали три одинаковых машинки. Саша сделал третью часть первой машинки, пятую часть второй машинки и пятнадцатую часть третьей машинки. Какую часть всей работы сделал Саша?
Ответ: пятую часть.
Решение 1: Всего Саша сделал 1/3 +1/5 +1/15 = 3/5 машинки. Что составляет 3/5 : 3 = 1/5 от трёх машинок.
Решение 2: Разделим каждую машинку на 15 частей. Всего 45 частей. Саша сделал пять частей от первой машинки, 3 части от второй машинки и 1 часть от третьей машинки. То есть всего 9 частей из 45, другими словами, пятую часть.
Критерии: Только ответ – 0 баллов. Частичное решение задачи – 0 баллов.

7.2. Юра и Рома нашли пять натуральных чисел, идущих подряд, и возвели каждое из них в квадрат. После этого Юра забрал себе три из пяти получившихся квадратов, а Рома два оставшихся. Оказалось, что сумма чисел, которые забрал Юра, равна сумме чисел, которые забрал себе Рома. Приведите пример чисел, которые могли найти Юра и Рома, и проверьте, что они подходят.
Ответ: Например, 10, 11, 12, 13, 14. Юра забрал квадраты первых трёх чисел 100 + 121 + 144 = 365. Роме достались оставшиеся два квадрата 169 + 196 = 365.
Критерии: Любая подходящая пятёрка чисел без проверки – 3 балла.

7.3. На плоскости расположены точки A, B, C, D, X. Известны некоторые длины отрезков: $AC = 2$, $AX = 5$, $AD = 11$, $CD = 9$, $CB = 10$, $DB = 1$, $XB = 7$. Найдите длину отрезка CX.
Ответ: 3.
Решение: Заметим, $AD = 11 = 2 + 9 = AC + CD$. Значит, точки A, C, D лежат на одной прямой CD (так как неравенство треугольника обращается в равенство). Заметим, $CB = 10 = 9 + 1 = CD + DB$. Значит, точки C, D, B лежат на одной прямой CD (так как неравенство треугольника обращается в равенство). Значит, все четыре точки лежат на одной прямой CD, при этом C между AD, а D между C и B, то есть в порядке A, C, D, B. Заметим $AB = AD + DB = 11 + 1 = 5 + 7 = AX + XB$. Значит, точки A, X, B лежат на одной прямой AB (так как неравенство треугольника обращается в равенство).
Итак, все точки лежат на отрезке AB. Значит, $CX = AX – AC = 5 – 2 = 3$.
Критерии:
Только ответ – 0 баллов.
Ответ с проверкой – 1 балл.
Решение из предположения, что все точки лежат на одной прямой – не более 3 баллов.

7.4. Петя и Волк играют в игру. Изначально на доске написано число 0, каждым ходом написанное число нужно увеличить на 2, 3, 8 или 9. Ходы делаются по очереди, первым ходит Петя. Выигрывает тот, после чьего хода получится число, кратное 2020. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника?
Ответ: Петя.
Решение: Пусть Петя сначала напишет 3, а потом будет дополнять ход Волка так, чтобы сумма их ходов прибавляла 11 (если Волк добавляет 3, то Петя добавляет 8 и наоборот, если Волк добавляет 2, то Петя добавляет 9 и наоборот). Таким образом, после хода Пети число имеет вид $3 + 11k$. При этом никакое число такого вида не будет пропущено, так как Волк и Петя добавляют ровно 11. А

после хода Волка число может иметь один из следующих видов: $11k$ (если Волк добавляет 8), $11k + 5$ (если Волк добавляет 2), $11k + 6$ (если Волк добавляет 3), $11k + 1$ (если Волк добавляет 9).

Заметим, что $2020 = 183*11 + 7$. Никто из играющих не может это получить. Далее, $4040 = 367*11 + 3$. Число такого вида Волк не может получить, а Петя получить обязан, как было показано ранее.

Критерии:

Только ответ – 0 баллов.

Выделение парных ходов 3-8, 2-9 (даже если стратегия за другого игрока), других продвижений нет – 2 балла.

7.5. В кружке занимались 50 школьников, которые иногда ходили на занятия. Оказалось, что любые два школьника встретились на каком-либо занятии ровно один раз. Кроме того, известно, что ни на одно занятие не приходили все школьники одновременно. Докажите, что есть школьник, который был хотя бы на 8 занятиях.

Решение: Допустим, это не так. Возьмём произвольного школьника, назовём его Юрой. Юра пришёл не более чем на 7 занятий и встретил всех других школьников. То есть, найдётся занятие, допустим первое, на которое, кроме Юры, пришло ещё хотя бы 7 школьников (если это не так, то всего школьников без Юры меньше 49). Кроме этого, обязательно найдётся школьник, который первое занятие не посетил, назовём его Ромой (иначе на этом занятии были все школьники). Итак, Рома должен встретиться с Юрой и с хотя бы ещё 7 школьниками, которые были на первом занятии. При этом Юра и эти школьники уже один раз встретились на первом занятии и больше встречаться не могут. Значит, Рома встречал их на разных занятиях. Но для этого нужно хотя бы 8 занятий (одно для Юры и ещё по одному для оставшихся школьников с первого занятия). Противоречие. Значит, обязательно найдётся школьник, который сходил хотя бы на 8 занятий.

Критерии: Логика решения продемонстрирована только на частных случаях – 3 балла.